Zadatak 35. Dva vrha na osnovici pravokutnog trokuta žarišta su hiperbole $x^2 - 4y^2 = 4$, a treći vrh trokuta na asimptoti je te hiperbole. Kolika je površina tog trokuta?

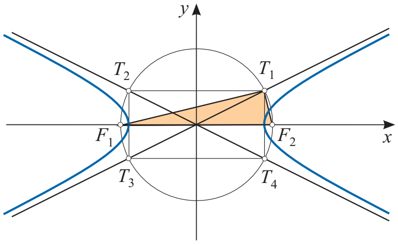
Rješenje.

$$H \;\ldots\; x^2 - 4y^2 = 4 \quad \Big/ : 4$$

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$$

$$e^2 = a^2 + b^2 = 5 \implies \boxed{e = \sqrt{5}}$$

$$\text{asimptote} \;\ldots\; y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{1}{2}x$$



Po Talesovom poučku tražene točke su presjek kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ gdje je $r = e$ i asimtota hiperbole:

$$k \;\ldots\; x^2 + y^2 = 5$$

$$s_1,\; s_2 \;\ldots\; y = \pm\frac{1}{2}x$$

$$k \cap s_{1,2} \;\ldots\; x^2 + \left(\pm\frac{1}{2}x\right)^2 = 5$$

$$x^2 + \frac{1}{4}x^2 = 5$$

$$\frac{5}{4}x^2 = 5 \quad \Big/ \cdot \frac{4}{5}$$

$$x^2 = 4 \implies \boxed{x = \pm 2}$$

$$y = \pm\frac{1}{2} \cdot 2$$

$$\boxed{y = \pm 1} \implies \boxed{T_{1,2,3,4}(\pm 2, \pm 1)}$$

Svi trokuti su sukladni pa imaju jednake površine:

$$\boxed{P} = \frac{2e \cdot y_T}{2} = e \cdot y_T = \sqrt{5} \cdot 1 \boxed{= \sqrt{5}}$$