

Zadatak 28. Odredi jednadžbu kružnice upisane trokutu ABC ako stranice trokuta leže na pravcima
 $x - 2y - 8 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ i $x + 2y - 8 = 0$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}x = 2y + 8 &\implies y = 1 - 2(2y + 8) \implies 5y = -15 \implies y = -3 \\x = 2y + 8 &\implies 2y = -(2y + 8) + 8 \implies 4y = 0 \implies y = 0 \\x = -2y + 8 &\implies y = 1 - 2(-2y + 8) \implies -3y = -15 \implies y = 5 \\A(2, -3), B(8, 0), C(-2, 5)\end{aligned}$$

Iz uvjeta da je središte $S(p, q)$ za r udaljeno od svakog od triju danih pravaca dobit ćemo sustav jednadžbi

$$\frac{|p - 2q - 8|}{\sqrt{1 + 4}} = r$$

$$\frac{|2p + q - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = r$$

$$\frac{|p + 2q - 8|}{\sqrt{1 + 4}} = r$$

$$(p - 2q - 8)^2 = 5r^2$$

$$(2p + q - 1)^2 = 5r^2$$

$$(p + 2q - 8)^2 = 5r^2$$

$$(p - 2q - 8 - 2p - q + 1)(p - 2q - 8 + 2p + q - 1) = 0$$

$$(p - 2q - 8 - p - 2q + 8)(p - 2q - 8 + p + 2q - 8) = 0$$

$$(-p - 3q - 7)(3p - q - 9) = 0$$

$$-4q(2p - 16) = 0$$

$$q = 3p - 9 \implies -4(3p - 9)(2p - 16) = 0$$

$$(p - 3)(p - 8) = 0$$

$$p^2 - 11p + 24 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2}$$

$$p = 3$$

$$q = 0$$

$$(3 - 2 \cdot 0 - 8)^2 = 5r^2$$

$$25 = 5r^2$$

$$r^2 = 5$$

$$(x - 3)^2 + y^2 = 5.$$