

Zadatak 4. Duljine stranica trokuta jednake su a , b i c . Ako je $a^2 + b^2 > c^2$, onda je kut nasuprot stranici c šiljast, a ako je $a^2 + b^2 < c^2$, taj je kut tup. Dokaži!

Rješenje. Promotrimo jednakost $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

Ako je $a^2 + b^2 > c^2$ imamo:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cos \gamma$$

$$c^2 < a^2 + b^2$$

$$a^2 + b^2 - 2bc \cos \gamma < a^2 + b^2$$

$$- 2bc \cos \gamma < 0$$

$$\underbrace{2bc}_{>0} \cos \gamma > 0 \implies \cos \gamma > 0 \implies \gamma \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

tj. za $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ γ je šiljast.

Ako je $a^2 + b^2 < c^2$ imamo:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cos \gamma$$

$$c^2 > a^2 + b^2$$

$$a^2 + b^2 - 2bc \cos \gamma > a^2 + b^2$$

$$- 2bc \cos \gamma > 0$$

$$\underbrace{2bc}_{>0} \cos \gamma < 0 \implies \cos \gamma < 0 \implies \gamma \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$$

tj. za $a^2 + b^2 - c^2 < 0$ γ je tup.