Zadatak 10. Dokaži da za svaki trokut $\triangle ABC$ vrijedi:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{4R}.$$

Rješenje. Neka je O sjecište simetrala kutova trokuta, r polumjer trokutu upisane kružnice. Tada je $|AB|:|AO|=\sin(\sphericalangle AOB):\sin\frac{\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}:\sin\frac{\beta}{2}$ (jer je $\sphericalangle AOB=180^\circ-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=90^\circ+\frac{\gamma}{2}$). Nadalje, $r=|AO|\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$, te $|AB|=2R\cdot\sin\gamma=4R\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$. I sad je: $4R\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}:r=\cos\frac{\gamma}{2}:\sin\frac{\beta}{2}$. Iz ove jednakosti tvrdnja slijedi izravno.

Zadatak se može brže dokazati primjenom formula za sinus polovičnih kutova u trokutu, Heronove formule te poznatih veza: $P=rs$, $4RP=abc$. Napravi cijeli postupak!