

Zadatak 19.

Nad stranicama \overline{AB} , \overline{BC} i \overline{AC} trokuta $\triangle ABC$ konstruirani su prema van kvadrati $AEFB$, $BPQC$ i $ACMN$. Dokaži: $P_{\triangle BFP} = P_{\triangle MCQ} = P_{\triangle EAN} = P_{\triangle ABC}$. Ako su zadane duljine stranica a i b , za koji kut γ šesterokut $EFPMN$ ima najveću površinu?

Rješenje.

Izračunajmo površinu trokuta BFP : $P_{\triangle BFP} = \frac{1}{2}ac \sin(\sphericalangle PBF) = \frac{1}{2}ac \sin(180^\circ - \beta) = \frac{1}{2}ac \sin \beta = P_{\triangle ABC}$. Analogno se dokazuju i ostale jednakosti.

Površina šesterokuta jednaka je $P = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \sin \gamma$. No $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, te je $P = 2(a^2 + b^2) + 2ab(\sin \gamma - \cos \gamma) = 2(a^2 + b^2) + 2\sqrt{2}ab \sin(\gamma - 45^\circ)$. Površina će biti najveća kad najveću vrijednost primi $\sin(\gamma - 45^\circ)$, a to je za $\gamma = 135^\circ$.

