Zadatak 6. Dokaži da je za sve $x \in \mathbf{R}$ ispunjena nejednakost

$$|3\sin x - 4\cos x| \leqslant 5.$$

Rješenje. Općenito je $|a\sin x + b\cos x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ dokažimo za $a=3$, $b=4$:

$$\begin{aligned}
& |3\sin x + 4\cos x| \leqslant \sqrt{9+16} \\
\iff\quad & (3\sin x + 4\cos x)^2 \leqslant (\sqrt{9+16})^2 \\
\iff\quad & 9\sin^2 x + 24\sin x\cos x + 16\cos^2 x \leqslant 25 \\
\iff\quad & 9(1-\cos^2 x) + 24\sin x\cos x + 16(1-\sin^2 x) \leqslant 25 \\
\iff\quad & -9\cos^2 x + 9 + 24\sin x\cos x - 16\sin^2 x + 16 \leqslant 25 \\
\iff\quad & -9\cos^2 x + 24\sin x\cos x - 16\sin^2 x + 25 \leqslant 25 \\
\iff\quad & -(3\cos x + 4\sin x)^2 \leqslant 0 \quad / \cdot (-1) \\
\iff\quad & (3\cos x + 4\sin x)^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

pa je onda $|3\sin x - 4\cos x| \leqslant \sqrt{3^2+4^2} = 5$.