

Zadatak 7. Ako je $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$, dokaži da je onda

$$\operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \dots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n.$$

Rješenje. Zbog početnog uvjeta je $\operatorname{tg} \alpha_1 < \operatorname{tg} \alpha_2 < \dots < \operatorname{tg} \alpha_n$. Kako je $\cos \alpha_i > 0$ za sve $i = 1, 2, \dots, n$, onda vrijedi $\operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \cos \alpha_i < \sin \alpha_i < \operatorname{tg} \alpha_n \cdot \cos \alpha_i$. Zbrajanjem svih ovih n nejednakosti dobit ćemo $\operatorname{tg} \alpha_1 (\cos \alpha_1 + \dots + \cos \alpha_n) < \sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n < \operatorname{tg} \alpha_n (\cos \alpha_1 + \dots + \cos \alpha_n)$. Posljednju nejednakost još podijelimo s $\cos \alpha_1 + \dots + \cos \alpha_n$, te dobivamo $\operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \dots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n$.