**Zadatak 9.** Za neparne prirodne brojeve $m$ i $n$ jedina rješenja jednadžbe

$$\sin^n x + \frac{1}{\cos^m x} = \cos^n x + \frac{1}{\sin^m x}$$

su brojevi $\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

***Rješenje.*** Uvrštavanjem $\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ pokazujemo da se radi o rješenju jednadžbe. Treba pokazati da jednadžba nema drugih rješenja.

Zapišimo jednadžbu u obliku $\frac{1}{\cos^m x} - \cos^n x = \frac{1}{\sin^m x} - \sin^n x$.

Ako je $\sin x < 0 < \cos x$ ili $\cos x < 0 < \sin x$, jednadžba nema rješenja jer su s njezinih strana brojevi suprotnog predznaka.

Za $0 < \sin x < \cos x$ ili $\sin x < \cos x < 0$ je $\sin^n x < \cos^n x$ i $\frac{1}{\cos^m x} < \frac{1}{\sin^m x}$. Zbrojimo li te dvije nejednakosti, dobit ćemo:

$$\sin^n x + \frac{1}{\cos^m x} < \cos^n x + \frac{1}{\sin^m x}.$$

Analogno se za $0 < \cos x < \sin x$ ili $\cos x < \sin x < 0$ dobije

$$\sin^n x + \frac{1}{\cos^m x} > \cos^n x + \frac{1}{\sin^m x}.$$

Time je tvrdnja dokazana.