

Zadatak 16.

$$\begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x}{a} = \frac{\operatorname{tg} x}{b} + \frac{\operatorname{tg} x}{c} \\ x + y + z = \pi \end{cases}$$

Rješenje.

Iz prve jednadžbe slijedi $\operatorname{tg} x = ka$, $\operatorname{tg} y = kb$, $\operatorname{tg} z = kc$, gdje je k konstanta proporcionalnosti. Nadalje, iz $x + y = \pi - z$ slijedi $\operatorname{tg}(x + y) = -\operatorname{tg} z$, ili $\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} = -\operatorname{tg} z$. Odatle je opet

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z.$$

Sada uvrstimo vrijednosti s početka i dobijemo: $k(a + b + c) = k^3 \cdot abc$. Slijedi

$$k = 0 \text{ ili } k = \pm \sqrt{\frac{a + b + c}{abc}}.$$

Ako je $k = 0$, onda je $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z = 0$ pa je $x_1 = k_1\pi$, $y_1 = k_2\pi$, $z_1 = k_3\pi$. Pritom su k_1, k_2 i k_3 cijeli brojevi takvi da je $k_1 + k_2 + k_3 = 1$ (jer je $x + y + z = \pi$).

$$\text{Preostaje slučaj } k = \pm \sqrt{\frac{a + b + c}{2}}.$$

$$\text{Tada je } x = \pm \operatorname{arc} \operatorname{tg} a \cdot \left(\pm \sqrt{\frac{a + b + c}{2}} \right) + m_1\pi,$$

$$y = \pm \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} b \cdot \pm \sqrt{\frac{a + b + c}{2}} \right) + m_2\pi, \quad z = \pm \operatorname{arc} \operatorname{tg} c \cdot \left(\pm \sqrt{\frac{a + b + c}{2}} \right) + m_3\pi.$$

Pritom cijele brojeve m_1, m_2 i m_3 treba odabrati tako da bude zadovoljen uvjet $x + y + z = \pi$.