

■ Rješenja složenijih zadataka

Zadatak 1. Dokaži nejednakosti:

$$1) \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \geq 4;$$

$$2) \frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} \geq 8.$$

Rješenje.

1)

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \geq 4$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \geq 4$$

$$\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \geq 4$$

$$\frac{1}{\frac{1}{4} \sin^2 2x} \geq 4$$

$$\frac{4}{\sin^2 2x} \geq 4 \quad / \cdot \sin^2 2x$$

$$4 \geq 4 \sin^2 2x \quad (\text{jer } 0 \leq \sin^2 2x \leq 1)$$

$$2) \frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} \geq 2 \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{8}{\sin^2 2x} \geq 8.$$

U dokazu je primijenjena nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine dvaju pozitivnih realnih brojeva.