

Zadatak 19. Ako za kute α , β i γ trokuta vrijedi jednakost $\sin \alpha = \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma}$, taj je trokut pravokutan. Dokaži!

Rješenje. Zapišimo

$$\sin \alpha = \frac{2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{2 \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{\beta + \gamma}{2}}{\cos \frac{\beta + \gamma}{2}}.$$

No, kako je $\frac{\beta + \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, izraz je jednak $\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. Tako onda vrijedi

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

odakle slijedi $\cos \frac{\alpha}{2} = 0$ ili $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1$. Kako je $\frac{\alpha}{2} \neq 90^\circ$, onda vrijedi druga jednakost, te je $\alpha = 90^\circ$.