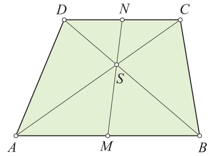
Zadatak 4. Ako sjecište S dijagonala četverokuta $ABCD$ i polovišta M i N njegovih stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ leže na jednom pravcu, taj je četverokut trapez ili paralelogram. Dokaži!

Rješenje. Označimo $\overrightarrow{SD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{b}$. Tada je $\overrightarrow{SB} = \alpha \cdot \vec{a}$, $\overrightarrow{SA} = \beta \cdot \vec{b}$, α, $\beta \in \mathbf{R}$. Nadalje, zato što su M i N polovišta dužina $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, vrijedi $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}) = \frac{1}{2}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})$ i $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SC}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.



No točke M, S i N leže na jednom pravcu, dakle, postoji realni broj k takav da je $\overrightarrow{SM} = k \cdot \overrightarrow{SN}$, odnosno $\frac{k}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})$. Posljednju jednakost možemo zapisati u obliku $\frac{k-\alpha}{2}\vec{a} + \frac{k-\beta}{2}\vec{b} = 0$, a odatle slijedi $k = \alpha = \beta$.

No onda iz $\overrightarrow{DC} = \vec{b} - \vec{a}$ i $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{a} - \beta\vec{b} = k(\vec{a} - \vec{b})$ slijedi $\overrightarrow{AB} = -k \cdot \overrightarrow{DC}$, što znači da su stranice AB i CD četverokuta paralelne te je on trapez ili paralelogram.