Rješenja zadataka 1.2

Zadatak 1. Matematičkom indukcijom dokaži da za sve $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:

1) $-3+3+9+\ldots+(6n-9)=3n^2-6n$;
2) $-1+3+7+\ldots+(4n-5)=n(2n-3)$;
3) $-3-7-11-\ldots-(4n-1)=-n(2n+1)$;
4) $5+8+11+\ldots+(3n+2)=\frac{1}{2}n(3n+7)$.

Rješenje. **1)** Dokazujemo indukcijom:

$$-3+3+9+\ldots+(6n-9)=3n^2-6n.$$

Baza indukcije. Za $n=1$ tvrdnja je očito točna: lijeva strana ima samo jedan pribrojnik, -3, a desna strana jednaka je $3\cdot 1^2-6\cdot 1=-3$.
Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da je tvrdnja točna i za $n=k$. Onda vrijedi jednakost

$$-3+3+\ldots+(6k-9)=3k^2-6k.$$

Korak indukcije. Izračunajmo sada zbroj lijeve strane kojoj je dodan još jedan član:

$$-3+3+\ldots+(6k-9)+(6(k+1)-9).$$

Radi pretpostavke indukcije smijemo koristiti jednakost $-3+3+\ldots+(6k-9)=3k^2-6k$ pa čitava suma iznosi

$$3k^2-6k+6k+6-9=3k^2-3=3(k+1)^2-6(k+1),$$

dakle, jednakost vrijedi i za broj $n=k+1$.
Prema aksiomu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.
2) Dokazujemo indukcijom:

$$-1+3+7+\ldots+(4n-5)=n(2n-3).$$

Baza. $n=1$:

$$-1=1(2\cdot 1-3).$$

Pretpostavka. Za $n=k$ vrijedi:

$$-1+3+7+\ldots+(4k-5)=k(2k-3).$$

Korak. Računamo lijevu stranu za $n=k+1$ i koristimo pretpostavku indukcije:

$$\begin{aligned}-1+3+7+\ldots+(4k-5)+[4(k+1)-5]&=k(2k-3)+[4k-1]\\&=2k^2-3k+4k-1\\&=2k^2+k-1\\&=(k+1)(2k-1)\\&=(k+1)[2(k+1)-3].\end{aligned}$$

Tvrdnja je dokazana.
3) Dokazujemo indukcijom:

$$-3-7-11-\ldots-(4n-1)=-n(2n+1)$$

Baza. $n = 1:$

$$-3 = -1(2 \cdot 1 + 1).$$

Pretpostavka. Za $n = k$ vrijedi:

$$-3 - 7 - 11 - \ldots + (4k - 1) = -k(2k + 1).$$

Korak. Računamo lijevu stranu za $n = k + 1$ i koristimo pretpostavku indukcije:

$$\begin{aligned}
-3 - 7 - 11 - \ldots - (4k - 1) - [4(k + 1) - 1] &= -k(2k + 1) - [4k + 3] \\
&= -2k^2 - k - 4k - 3 \\
&= -(2k^2 + 5k + 3) \\
&= -(k + 1)(2k + 3) \\
&= -(k + 1)[2(k + 1) + 1].
\end{aligned}$$

Tvrdnja je dokazana.

4) Dokazujemo indukcijom:

$$5 + 8 + 11 + \ldots + (3n + 2) = \frac{1}{2}n(3n + 7).$$

Baza. $n = 1:$

$$5 = \frac{1}{2} \cdot 1(3 \cdot 1 + 7).$$

Pretpostavka. Za $n = k$ vrijedi:

$$5 + 8 + 11 + \ldots + (3k + 2) = \frac{1}{2}k(3k + 7).$$

Korak. Računamo lijevu stranu za $n = k + 1$ i koristimo pretpostavku indukcije:

$$\begin{aligned}
5 + 8 + 11 + \ldots + (3k + 2) + [3(k + 1) + 2] &= \frac{1}{2}k(3k + 7) + [3k + 5] \\
&= \frac{1}{2}\left[3k^2 + 7k + 6k + 10\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[3k^2 + 13k + 10\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(k + 1)(3k + 10)\right] \\
&= \frac{1}{2}(k + 1)[3(k + 1) + 10].
\end{aligned}$$

Tvrdnja je dokazana.