Zadatak 3. Matematičkom indukcijom dokaži da za sve $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:

1) $1 \cdot 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-2} + \ldots + n \cdot 2 + (n+1)$
$= 2^{n+2} - (n+3)$;

2) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2$
$= (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$;

3) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{3}{3^3} + \ldots + \dfrac{n}{3^n} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$.

Rješenje. **1)** Dokazujemo indukcijom:

$$1 \cdot 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-2} + \ldots + n \cdot 2 + (n+1) = 2^{n+2} - (n+3).$$

Baza. S lijeve strane nalazi se $n+1$ pribrojnik. Zato za $n = 1$ zbroj s lijeve strane ima dva člana, prvi i posljednji:

$$1 \cdot 2^1 + (1+1) = 2^{1+2} - (1+3).$$

(Svejedno je hoćemo li uzeti formulu za drugi ili formulu za posljednji član i u nju staviti $n = 1$.)

Pretpostavka. Za $n = k$ vrijedi:

$$1 \cdot 2^k + 2 \cdot 2^{k-1} + 3 \cdot 2^{k-2} + \ldots + k \cdot 2 + (k+1) = 2^{k+2} - (k+3).$$

Korak. Moramo dokazati tvrdnju za broj $n = k+1$. Tada lijeva strana jednakosti glasi:

$$1 \cdot 2^{k+1} + 2 \cdot 2^k + 3 \cdot 2^{k-1} + \ldots + (k+1) \cdot 2 + (k+2).$$

Ovaj izraz možemo dovesti u vezu s onim iz pretpostavke indukcije! Dovoljno je iz svih članova osim posljednjeg izlučiti 2:

$$2 \cdot \Big[1 \cdot 2^k + 2 \cdot 2^{k-1} + 3 \cdot 2^{k-2} + \ldots + (k+1)\Big] + (k+2).$$

Izraz u zagradi iznosi, prema pretpostavci indukcije $2^{k+2} - (k+3)$. Dakle:

$$\begin{aligned}
2 \cdot \Big[1 \cdot 2^k + 2 \cdot 2^{k-1} + 3 \cdot 2^{k-2} + \ldots + (k+1)\Big] + (k+2)& \\
&= 2 \cdot \Big[2^{k+2} - (k+3)\Big] + (k+2) \\
&= 2^{k+3} - 2(k+3) + k + 2 \\
&= 2^{k+3} - 2k - 6 + k + 2 \\
&= 2^{k+3} - k - 4 \\
&= 2^{(k+1)+2} - [(k+1)+3].
\end{aligned}$$

Tvrdnja je dokazana.

2) Dokazujemo indukcijom:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Baza. $n = 1$:

$$1^2 = (-1)^{1-1} \cdot \frac{1(1+1)}{2}.$$

Pretpostavka. Za $n = k$ vrijedi:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{k-1} \cdot k^2 = (-1)^{k-1} \cdot \frac{k(k+1)}{2}.$$

Korak. Računamo lijevu stranu za $n = k + 1$ i koristimo pretpostavku indukcije:

$$\begin{aligned}
1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + &(-1)^{k-1} \cdot k^2 + (-1)^k \cdot (k+1)^2 \\
&= (-1)^{k-1} \cdot \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k \cdot (k+1)^2 \\
&= (-1)^{k-1} \cdot \frac{k+1}{2} \Big[k - 2(k+1)\Big] \\
&= (-1)^{k-1} \cdot \frac{k+1}{2} \Big[-k - 2\Big] \\
&= (-1)^k \cdot \frac{k+1}{2} (k+2) \\
&= (-1)^{(k+1)-1} \cdot \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}
\end{aligned}$$

Tvrdnja je dokazana.

3) Dokazujemo indukcijom:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$$

Baza. $n = 1$:

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{4} - \frac{2 \cdot 1 + 3}{4 \cdot 3^1}.$$

Pretpostavka. Za $n = k$ vrijedi:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{k}{3^k} = \frac{3}{4} - \frac{2k+3}{4 \cdot 3^k}.$$

Korak. Računamo lijevu stranu za $n = k + 1$ i koristimo pretpostavku indukcije:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + &\frac{k}{3^k} + \frac{k+1}{3^{k+1}} \\
&= \frac{3}{4} - \frac{2k+3}{4 \cdot 3^k} + \frac{k+1}{3^{k+1}} \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^{k+1}} \Big[3(2k+3) - 4(k+1)\Big] \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^{k+1}} \Big[6k + 9 - 4k - 4\Big] \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^{k+1}} \Big[2k + 5\Big] \\
&= \frac{3}{4} - \frac{2(k+1)+3}{4 \cdot 3^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Tvrdnja je dokazana.