Zadatak 4. Uvrsti nekoliko početnih vrijednosti za broj n i pokušaj odrediti izraz za sljedeće zbrojeve. Dobivenu formulu provjeri matematičkom indukcijom.

1) $1+2+4+8+\ldots+2^{n-1}=?$

2) $1+3+9+27+\ldots+3^{n-1}=?$

3) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)n}=?$

Rješenje. **1)** Početne vrijednosti ovog zbroja su

$$\begin{aligned}
n&=1: && 1\\
n&=2: && 1+2=3\\
n&=3: && 1+2+4=7\\
n&=4: && 1+2+4+8=15\\
n&=5: && 1+2+4+8+16=31
\end{aligned}$$

Prepoznajemo brojeve koji su za 1 manji od potencija broja 2. Zato je pretpostavka:

$$1+2+4+8+\ldots+2^{n-1}=2^n-1.$$

Bazu smo provjerili. Dokazujemo korak indukcije:

$$\begin{aligned}
1+2+4+8+\ldots+2^{n-1}+2^n&=2^n-1+2^n\\
&=2\cdot 2^n-1\\
&=2^{n+1}-1.
\end{aligned}$$

Tvrdnja je dokazana.

2) Početne vrijednosti ovog zbroja su

$$\begin{aligned}
n&=1: && 1\\
n&=2: && 1+3=4\\
n&=3: && 1+3+9=13\\
n&=4: && 1+3+9+27=40\\
n&=5: && 1+3+9+27+81=121
\end{aligned}$$

Niti nakon pet vrijednosti nismo sigurni u svoju pretpostavku. Zbrajali smo potencije broja 3, a u prethodnom primjeru (gdje je rezultat bio 2^n-1) bilo je riječi o potencijama broja 2. To nam daje ideju da je i ovdje riječ o izrazu povezanom s potencijama broja 3. Napišimo sad red tih potencija, umanjenih za jedan:

$$2,\quad 8,\quad 26,\quad 80,\quad 242.$$

Usporedbom s gore napisanim vrijednostima možemo otkriti pretpostavku indukcije:

$$1+3+9+27+\ldots+3^{n-1}=\frac{1}{2}(3^n-1).$$

Bazu smo provjerili. Dokazujemo korak indukcije:

$$\begin{aligned}1+3+9+27+\ldots+3^{n-1}+3^n &= \frac{1}{2}(3^n-1)+3^n\\ &= \frac{1}{2}\left[3^n-1+2\cdot 3^n\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[3\cdot 3^n-1\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[3^{n+1}-1\right].\end{aligned}$$

Tvrdnja je dokazana.

3) Početne vrijednosti ovog zbroja su

$$\begin{aligned} n=2: &\qquad \frac{1}{2}\\ n=3: &\qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\\ n=4: &\qquad \frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}\\ n=5: &\qquad \frac{3}{4}+\frac{1}{20}=\frac{4}{5}.\end{aligned}$$

Pretpostavka indukcije

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{n-1}{n}$$

je provjerena za $n=2,3,4,5$. Dokazujemo korak indukcije:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)} &= \frac{n-1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}\\ &= \frac{(n-1)(n+1)+1}{n(n+1)}\\ &= \frac{n^2-1+1}{n(n+1)}\\ &= \frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

Tvrdnja je dokazana.