Zadatak 5. Dokaži da za $x \neq 1$ (i $x \neq -1$ u trećem primjeru) i za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:

1) $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$;

2) $x + 2x^2 + \ldots + nx^n = \dfrac{x - (n+1)x^{n+1} + n \cdot x^{n+2}}{(x-1)^2}$, za sve $n \in \mathbf{N}$;

3) $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{4}{1+x^4} + \ldots + \dfrac{2^n}{1+x^{2^n}}$
$= \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2^{n+1}}{1 - x^{2^{n+1}}}$.

Rješenje. Dokazujemo indukcijom.

1) *Baza*, $n = 1$:

$$1 + x = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Dokažimo da ona onda vrijedi i za broj $n + 1$:

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} &= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + x^{n+1} \\ &= \frac{x^{n+1} - 1 + x^{n+2} - x^{n+1}}{x - 1} \\ &= \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}. \end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za svaki n.

2) *Baza*, $n = 1$:

$$x = \frac{x - 2x^2 + x^3}{(x-1)^2};$$
$$x = \frac{x(x-1)^2}{(x-1)^2}.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n:

$$x + 2x^2 + \ldots + nx^n = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + n \cdot x^{n+2}}{(x-1)^2}.$$

Dokažimo da ona onda vrijedi i za broj $n+1$:

$$\begin{aligned}
x+2x^2+\ldots+nx^n+(n+1)x^{n+1}
&=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+n\cdot x^{n+2}}{(x-1)^2}+(n+1)x^{n+1}\\
&=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+n\cdot x^{n+2}+(n+1)x^{n+1}(x-1)^2}{(x-1)^2}\\
&=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+n\cdot x^{n+2}+(n+1)x^{n+1}(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}\\
&=\frac{x+n\cdot x^{n+2}-2(n+1)x^{n+2}+(n+1)x^{n+3}}{(x-1)^2}\\
&=\frac{x-(n+2)x^{n+2}+(n+1)x^{n+3}}{(x-1)^2}.
\end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za svaki n.

3) Zbroj s lijeve strane ima samo jedan član ako je $n=0$, i tu vrijednost broja n uzimamo za bazu indukcije:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x}&=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{1-x^2},\\
\frac{1}{1+x}&=\frac{-1-x+2}{(1-x)(1+x)},\\
\frac{1}{1+x}&=\frac{1-x}{(1-x)(1+x)},
\end{aligned}$$

što je istina.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

Dokažimo da ona onda vrijedi i za broj $n+1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}+\frac{2^{n+1}}{1+x^{2^{n+1}}}
&=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}+\frac{2^{n+1}}{1+x^{2^{n+1}}}\\
&=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}(1+x^{2^{n+1}})+2^{n+1}(1-x^{2^{n+1}})}{(1-x^{2^{n+1}})(1+x^{2^{n+1}})}\\
&=\frac{1}{x-1}+\frac{2\cdot 2^{n+1}}{1-\left(x^{2^{n+1}}\right)^2}\\
&=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+2}}{1-x^{2^{n+2}}}.
\end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za svaki n.