Zadatak 7. Dokaži matematičkom indukcijom:

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}=2^n.$$

Rješenje. Za $n=1$ umnošci u brojniku i nazivniku imaju samo po jedan član:

$$\frac{2}{1}=2^1.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n:

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}=2^n.$$

Dokažimo da ona onda vrijedi i za broj $n+1$. Napišimo kako u tom slučaju izgleda lijeva strana:

$$\frac{(n+2)\ldots(2n-1)\cdot 2n\cdot(2n+1)(2n+2)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)(2n+1)}.$$

Transformirajmo taj izraz tako da možemo iskoristiti pretpostavku indukcije:

$$\begin{aligned}&\frac{(n+2)\ldots(2n-1)\cdot 2n\cdot(2n+1)\cdot 2(n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)(2n+1)}\\&=\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}\cdot\frac{2(2n+1)}{2n+1}\\&=2^n\cdot 2=2^{n+1}.\end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za svaki n.