Zadatak 8. Matematičkom indukcijom provjeri sljedeće formule za zbrojeve potencija $S_k = 1^k + 2^k + \ldots \ +n^k$, $k \in \mathbf{N}$.

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$S_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2;$$

$$S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Rješenje. **1)** Treba dokazati:

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Za $n=1$ imamo

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

te tvrdnja vrijedi.
Pretpostavimo da ona vrijedi i za bilo koji prirodni broj n:

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Onda za broj $n+1$ imamo

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

pa tvrdnja vrijedi i za $n+1$. Dakle, ona vrijedi za svaki prirodni broj n.
2) Treba dokazati:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Za $n=1$ imamo

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$$

te tvrdnja vrijedi.
Pretpostavimo da ona vrijedi i za bilo koji prirodni broj n:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Onda za broj $n+1$ imamo

$$\begin{aligned} 1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} \end{aligned}$$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$$
$$= \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

pa tvrdnja vrijedi i za $n+1$. Dakle, ona vrijedi za svaki prirodni broj n.

3) Treba dokazati:

$$1^3+2^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Za $n=1$ imamo

$$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

te tvrdnja vrijedi.

Pretpostavimo da ona vrijedi i za bilo koji prirodni broj n:

$$1^3+2^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Onda za broj $n+1$ imamo

$$1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2[n^2+4(n+1)]}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2[n^2+4n+4]}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

pa tvrdnja vrijedi i za $n+1$. Dakle, ona vrijedi za svaki prirodni broj n.

4) Treba dokazati:

$$1^4+2^4+\ldots+n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Za $n=1$ imamo

$$1^4 = \frac{1\cdot(1+1)(2\cdot1+1)(3\cdot1^2+3\cdot1-1)}{30};$$
$$1 = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot5}{30}$$

te tvrdnja vrijedi.

Pretpostavimo da ona vrijedi i za bilo koji prirodni broj n:

$$1^4+2^4+\ldots+n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Onda za broj $n+1$ imamo

$$\begin{aligned} 1^4+2^4+\ldots+n^4+(n+1)^4 &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}+(n+1)^4 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)+30(n+1)^4}{30} \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1)(3n^2+3n-1)+30(n+1)^3]}{30}. \end{aligned}$$

Transformirajmo izraz unutar uglate zagrade u brojniku:

$$\begin{aligned} &n(2n+1)(3n^2+3n-1)+30(n+1)^3 \\ &\qquad = (2n^2+n)(3n^2+3n-1)+30(n^3+3n^2+3n+1) \\ &\qquad = 6n^4+9n^3+n^2-n+30n^3+90n^2+90n+30 \\ &\qquad = 6n^4+39n^3+91n^2+89n+30. \end{aligned}$$

Ako je pretpostavka indukcije točna, ovaj izraz mora u sebi sadržavati članove $(n+2)(2n+3)$. Umnožak tih dvaju članova je $2n^2+7n+6$. Podijelimo dobiveni polinom četvrtog stupnja s ovim polinomom:

$$\begin{array}{lllll} 6n^4 & +39n^3 & +91n^2 & +89n & +30 : 2n^2+7n+6 = 3n^2+9n+5 \\ \underline{6n^4} & \underline{+21n^3} & \underline{+18n^2} & & \\ & 18n^3 & +73n^2 & +89n & +30 \\ & \underline{18n^3} & \underline{+63n^2} & \underline{+54n} & \\ & & 10n^2 & +35n & +30 \\ & & \underline{10n^2} & \underline{+35n} & \underline{+30} \end{array}$$

Dakle, polinom je djeljiv s $(n+2)(2n+3)$, a rezultat dijeljenja je $3n^2+9n+5$:

$$6n^4+39n^3+91n^2+89n+30=(n+2)(2n+3)(3n^2+9n+5).$$

Vratimo se sad na kompletan izraz:

$$\begin{aligned} &\frac{(n+1)[n(2n+1)(3n^2+3n-1)+30(n+1)^3]}{30} \\ &\qquad = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)(3n^2+9n+5)}{30} \\ &\qquad = \frac{(n+1)[(n+1)+1][(2(n+1)+1][3(n+1)^2+3(n+1)-1]}{30} \end{aligned}$$

pa tvrdnja vrijedi i za $n+1$. Dakle, ona vrijedi za svaki prirodni broj n.