Zadatak 9. Koristeći se formulama iz prethodnog zadatka izračunaj sljedeće sume:

1) $2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + \ldots + 2(3n-1)$;

2) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)$;

3) $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots + (2n-1)(2n+1)$;

4) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n+1)$;

5) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2)$;

6) $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + \ldots + (n+1) \cdot n^2$.

Rješenje. **1)** Svaki je pribrojnik oblika

$$2(3k-1) = 6k-2$$

pa je čitav zbroj jednak

$$(6 \cdot 1 - 2) + (6 \cdot 2 - 2) + \ldots + (6 \cdot n - 2) = 6 \cdot S_1 - 2n.$$

Dalje je

$$6S_1 - 2n = 6 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2n = 3n(n+1) - 2n = n(3n+1).$$

2) Svaki je pribrojnik oblika $k(k+1)$, odnosno k^2+k te zbroj možemo zapisati u obliku

$$1^2+1+2^2+2+3^2+3+\ldots+n^2+n = 1+2+3+\ldots+n+1^2+2^2+\ldots+n^2 = S_1+S_2.$$

Tako se dobije da je traženi zbroj jednak

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= n(n+1)\left[\frac{1}{2} + \frac{2n+1}{6}\right] \\ &= n(n+1)\frac{3+2n+1}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \end{aligned}$$

3) Svaki je pribrojnik oblika

$$(2k-1)(2k+1) = 4k^2 - 1$$

pa zbroj možemo zapisati u obliku

$$(4 \cdot 1^1 - 1) + (4 \cdot 2^2 - 1) + \ldots + (4 \cdot n^2 - 1) = 4 \cdot S_2 - n.$$

Dalje je

$$\begin{aligned} 4 \cdot S_2 - n &= 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n = \frac{2n(n+1)(2n+1) - 3n}{3} \\ &= \frac{n[2(n+1)(2n+1) - 3]}{3} = \frac{n(4n^2+6n-1)}{3}. \end{aligned}$$

4) Svaki je pribrojnik oblika

$$k(3k+1) = 3k^2 + k$$

pa zbroj možemo zapisati u obliku

$$(3 \cdot 1^1 + 1) + (3 \cdot 2^2 + 2) + \ldots + (3 \cdot n^2 + n) = 3 \cdot S_2 + S_1.$$

Dalje je

$$\begin{aligned}3\cdot S_2+S_1&=3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\\&=n(n+1)\left[\frac{2n+1}{2}+\frac{1}{2}\right]\\&=n(n+1)\frac{2n+2}{2}\\&=n(n+1)^2.\end{aligned}$$

5) Svaki je pribrojnik oblika

$$k(k+1)(k+2)=k^3+3k^2+2k$$

pa je čitav zbroj jednak $S_3+3S_2+2S_1$. Dalje je

$$\begin{aligned}S_3+3S_2+2S_1&=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\&=n(n+1)\left[\frac{n(n+1)}{4}+\frac{2n+1}{2}+1\right]\\&=n(n+1)\frac{n(n+1)+4n+2+4}{4}\\&=n(n+1)\frac{n^2+5n+6}{4}\\&=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.\end{aligned}$$

6) Svaki je pribrojnik oblika

$$(k+1)k^2=k^3+k^2$$

pa je čitav zbroj jednak S_3+S_2. Dalje je

$$\begin{aligned}S_3+S_2&=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=n(n+1)\left[\frac{n(n+1)}{4}+\frac{2n+1}{6}\right]\\&=n(n+1)\frac{3n(n+1)+2(2n+1)}{12}\\&=n(n+1)\frac{3n^2+7n+2}{12}\\&=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}.\end{aligned}$$