



**Zadatak 10.** Matematičkom indukcijom dokaži sljedeću formulu za kvadriranje višičlanog izraza:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_{n-1}a_n).$$

**Rješenje.** Za  $n = 2$  tvrdnja vrijedi jer se svodi na poznati izraz

$$(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za izraz s  $n$  pribrojnika:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_{n-1}a_n).$$

(U zagradi se nalaze umnošci svih članova s različitim indeksima.) Dokažimo da identična formula vrijedi i za izraz s  $n + 1$  pribrojnikom. U tu ćemo svrhu prvih  $n$  pribrojnika shvatiti kao jednu cjelinu, a zatim iskoristiti pretpostavku indukcije:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1})^2 &= [(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + a_{n+1}]^2 \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \end{aligned}$$

(sad koristimo pretpostavku indukcije)

$$\begin{aligned} &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \\ &\quad + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_{n-1}a_n) \\ &\quad + a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2 \\ &\quad + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_n a_{n+1}). \end{aligned}$$

(U zagradi su ponovo umnošci svih članova s različitim indeksima.)