Zadatak 11. Matematičkom indukcijom dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi:

1) $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$;

2) $|a_1 \cdot a_2 \cdots a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdots |a_n|$.

Rješenje. **1)** Za $n = 1$ tvrdnja je trivijalno ispunjena. Za $n = 2$ bilo bi $|a_1 + a_2| \leqslant |a_1| + |a_2|$. Dokažimo to. Zbrajanjem očitih nejednakosti: $-|a_1| \leqslant a_1 \leqslant |a_1|$, $-|a_2| \leqslant a_2 \leqslant |a_2|$ dobivamo $-(|a_1| + |a_2|) \leqslant a_1 + a_2 \leqslant |a_1| + |a_2|$, što je ekvivalentno s $|a_1 + a_2| \leqslant |a_1| + |a_2|$.

Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja zadatka za k pribrojnika. Onda je

$$\begin{aligned} |a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1}| &= |(a_1 + \ldots + a_k) + a_{k+1}| \\ &\leqslant |a_1 + \ldots + a_k| + |a_{k+1}| \\ &\leqslant |a_1| + \ldots + |a_k| + |a_{k+1}|. \end{aligned}$$

2) Za $n = 1$ tvrdnja je trivijalno ispunjena. Za $n = 2$ bilo bi $|a_1| \cdot |a_2| = ||a_1| \cdot |a_2|| = |(\pm a_1) \cdot (\pm a_2)| = |\pm a_1 a_2| = |a_1 \cdot a_2|$, pa tvrdnja vrijedi.

Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja zadatka za k umnožaka. Onda je

$$\begin{aligned} |a_1 \cdot \ldots \cdot a_k \cdot a_{k+1}| &= |(a_1 \cdot \ldots \cdot a_k) \cdot a_{k+1}| \\ &= |a_1 \cdot \ldots \cdot a_k| \cdot |a_{k+1}| \\ &= |a_1| \cdot \ldots \cdot |a_k| \cdot |a_{k+1}|. \end{aligned}$$