Zadatak 12. Matematičkom indukcijom dokaži:

1) $6 \mid n^3 + 11n$;

2) $6 \mid 2n^3 + 3n^2 + 7n$;

3) $24 \mid n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$;

4) $7 \mid n^7 + 6n$;

za sve prirodne brojeve n.

Rješenje. **1)** Za $n = 1$ vrijedi $n^3 + 11n = 12$ pa baza indukcije vrijedi. Dokažimo da iz $6 \mid n^3 + 11n$ slijedi $6 \mid (n+1)^3 + 11(n+1)$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 11(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 11n + 11 \\ &= n^3 + 11n + 3(n(n+1) + 4).\end{aligned}$$

Prvi dio, $n^3 + 11n$ jest broj djeljiv sa 6, po pretpostavci indukcije. No sa 6 je djeljiv i pribrojnik $3(n(n+1)+4)$. Da je djeljiv s 3, očito je. Uoči još da je broj $n(n+1)$ paran. To je dovoljno za dokaz.

2) Dokazujemo: $6 \mid 2n^3 + 3n^2 + 7n$.

Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi jer je izraz zdesna jednak 12. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n. Onda za broj $n+1$ imamo:

$$\begin{aligned}2(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 7(n+1) &= 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 3(n^2 + 2n + 1) + 7n + 7 \\ &= 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 + 3n^2 + 6n + 3 + 7n + 7 \\ &= (2n^3 + 3n^2 + 7n) + 6(n^2 + 2n + 2).\end{aligned}$$

Izraz u prvoj zagradi djeljiv je sa 6 prema pretpostavci indukcije, pa je i čitav izraz djeljiv sa 6.

3) Dokazujemo: $24 \mid n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$.

Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi jer je izraz zdesna jednak 24. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n. Onda za broj $n+1$ imamo:

$$\begin{aligned}&(n+1)^4+6(n+1)^3+11(n+1)^2+6(n+1) \\ &\quad= n^4+4n^3+6n^2+4n+1+6n^3+18n^2+18n+6+11n^2+22n+11+6n+6 \\ &\quad= (n^4+6n^3+11n^2+6n)+(4n^3+24n^2+44n+24) \\ &\quad= (n^4+6n^3+11n^2+6n)+4(n^3+6n^2+11n+6).\end{aligned}$$

Izraz u prvoj zagradi djeljiv je s 24 prema pretpostavci indukcije. Preostaje dokazati da je izraz u drugoj zagradi djeljiv sa 6. To se može ponovo učiniti matematičkom indukcijom, na način sličan onom u prethodnom primjeru **2)**. Međutim, taj se izraz može napisati ovako:

$$\begin{aligned}n^3 + 6n^2 + 11n + 6 &= n^3 + n^2 + 5n^2 + 5n + 6n + 6 \\ &= n^2(n+1) + 5n(n+1) + 6(n+1) \\ &= (n+1)(n^2 + 5n + 6) \\ &= (n+1)(n+2)(n+3).\end{aligned}$$

Dakle, riječ je o umnošku triju uzastopnih prirodnih brojeva. Barem jedan od njih mora biti paran i barem jedan od njih mora biti djeljiv s 3. Zato je ovaj umnožak djeljiv sa 6.

Ovaj dio dokaza možemo napraviti i nešto jednostavnije ako pribrojnik $4(n^3 + 6n^2 + 11n + 6)$ napišemo u obliku

$$\begin{aligned}4n^3 + 24n^2 + 44n + 24 &= 24(n^3 + n^2 + n + 1) - 20(n^3 - n)\\ &= 24(n^3 + n^2 + n + 1) - 5 \cdot 4(n-1)n(n+1).\end{aligned}$$

Umnožak $(n-1)n(n+1)$ je uvijek djeljiv sa 6, pa je čitav izraz djeljiv s 24.

Time je dokaz završen.

Napomena. Sad vidimo da je i početni izraz moguće napisati ovako:

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Riječ je o umnošku četiriju uzastopnih brojeva. Na temelju toga zaključi zašto on mora biti djeljiv s 24.

4) Dokazujemo: $7 \mid n^7 + 6n$.

Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi jer je izraz zdesna jednak 7. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n. Onda za broj $n+1$ imamo:

$$\begin{aligned}&(n+1)^7 + 6(n+1)\\ &= n^7 + \binom{7}{1}n^6 + \binom{7}{2}n^5 + \binom{7}{3}n^4 + \binom{7}{3}n^3 + \binom{7}{2}n^2 + \binom{7}{1}n + 1 + 6n + 6\\ &= (n^7 + 6n) + 7n^6 + 21n^5 + 35n^4 + 35n^3 + 21n^2 + 7n + 7.\end{aligned}$$

Izraz u prvoj zagradi djeljiv je sa 7 prema pretpostavci indukcije, pa je i čitav izraz djeljiv sa 7.