Zadatak 14. Dokaži da su za sve prirodne brojeve n ispunjene nejednakosti:
1) $4^n > n^2$; **2)** $2^n > n^2 - 2n + 2$.

Rješenje. **1)** Za $n = 1$ imamo $4 > 1$. Pretpostavimo da za neki broj n vrijedi $4^n > n^2$. Treba dokazati da iz toga slijedi $4^{n+1} > (n+1)^2$. No prema pretpostavci je $4^{n+1} = 4 \cdot 4^n \geqslant 4n^2$. Dalje, zbog $n^2 \geqslant n$ i $n^2 \geqslant 1$ vrijedi $4n^2 \geqslant n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

2) Za $n = 1$ imamo $2 > 1$. Neka je

$$2^n > n^2 - 2n + 2.$$

Dokažimo da je onda

$$2^{n+1} > (n+1)^2 - 2(n+1) + 2 = n^2 + 1.$$

Prema pretpostavci indukcije je

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n > n^2 - 2n + 2 + 2^n = n^2 + 1 + 2^n - (2n - 1)$$

pa je dovoljno dokazati da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$2^n > 2n - 1.$$

Ova se tvrdnja također može dokazati indukcijom. Za $n = 1$ je $2^1 > 2 \cdot 1 - 1$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n. Onda je

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n > 2n - 1 + 2^n \geqslant 2n - 1 + 2 = 2(n+1) - 1.$$

Time je dokaz gotov.