Zadatak 15. Matematičkom indukcijom dokaži:

1) $3^n > 2^n + 3n$, za sve $n \geqslant 3$;

2) $n^3 > 3n + 3$, za sve $n \geqslant 3$;

3) $2^n > n^2$, za sve $n \geqslant 5$;

4) $2^n > n^3$, za sve $n \geqslant 10$.

Rješenje. **1)** Za $n = 3$ vrijedi $3^3 > 17$. Pretpostavimo da je $3^k > 2^k + 3k$ i dokažimo da je onda $3^{k+1} > 2^{k+1} + 3(k+1)$.

Zbrojimo nejednakosti $2 \cdot 3^k > 2 \cdot 2^k + 6k$ (pretpostavka) i $3^k > 3$ (za $k \geqslant 3$). Tad imamo

$$3^{k+1} > 2 \cdot 2^k + 6k + 3 > 2 \cdot 2^k + 3k + 3,$$

a odatle $3^{k+1} > 2^{k+1} + 3(k+1)$.

2) Za $n = 3$ imamo $27 > 12$. Pretpostavimo da je $k^3 > 3k + 3$. Onda vrijedi

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 > (3k+3) + 3 + 3 + 1 > 3k + 6 = 3(k+1) + 3.$$

3) Za $n = 5$ imamo $32 > 25$. Ako je $2^k > k^2$, onda je

$$2^{k+1} > 2k^2 = k^2 + k^2 > k^2 + 3k > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Ovdje smo koristili očitu nejednakost $k^2 > 3k$ koja vrijedi za $k > 4$.

4) Za $n = 10$ dobivamo $1024 > 1000$. Iz pretpostavke $2^k > k^3$ slijedi $2^{k+1} > 2k^3$. Dovoljno je pokazati da za $k \geqslant 10$ vrijedi $2k^3 > (k+1)^3$, odnosno $k^3 > 3k^2 + 3k + 1$. To je lako vidjeti već za $k \geqslant 7$:

$$k^3 \geqslant 7k^2 = 3k^2 + 3k^2 + k^2 > 3k^2 + 3k + 1.$$

Dakle, vrijedi $2^{k+1} > 2k^3 > (k+1)^3$ i tvrdnja je dokazana.