

Zadatak 17. Dokaži da za svaki prirodni broj n , $n > 1$, broj $2^{2^n} + 1$ završava znamenkom 7.

Rješenje. Za $n = 2$ je $2^{2^2} + 1 = 17$, pa baza indukcije vrijedi. Pretpostavimo da broj $2^{2^k} + 1$ za neki prirodni broj k završava znamenkom 7, pa dokažimo da tada i broj $2^{2^{k+1}} + 1$ završava znamenkom 7. Po pretpostavci je $2^{2^k} + 1$ oblika $10a + 7$, odnosno vrijedi $2^{2^k} = 10a + 6$, gdje je a prirodan broj. Sada možemo pisati

$$2^{2^{k+1}} + 1 = 2^{2^k \cdot 2} + 1 = (2^{2^k})^2 + 1 = (10a + 6)^2 + 1 = 100a^2 + 120a + 37,$$

a to je očito broj kojem je posljednja znamenka 7.