Zadatak 8. Dokaži matematičkom indukcijom da za svaki prirodni broj n vrijedi jednakost:

1) $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$;

2) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!\ =(n+1)!-1$.

Rješenje. **1)**

Baza. $\frac{0}{1!}=1-\frac{1}{1!}$;

Pretpostavka. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n:

$$\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!};$$

Korak. Provjerimo istinitost tvrdnje za broj $n+1$.

$$\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{n!}+\frac{n}{(n+1)!}$$
$$=1-\frac{(n+1)-n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!};$$

dakle, jednakost vrijedi i za broj $n+1$.

2) *Baza.*

$$1\cdot 1!=(1+1)!-1;$$
$$1=1\cdot 2-1;$$

Pretpostavka. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n:

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1.$$

Korak. Provjerimo istinitost tvrdnje za broj $n+1$.

$$\begin{aligned}1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!+(n+1)(n+1)!\\ &=(n+1)!-1+(n+1)(n+1)!\\ &=(n+1)!(1+n+1)-1=(n+1)!(n+2)-1\\ &=(n+2)!-1;\end{aligned}$$

dakle, jednakost vrijedi i za broj $n+1$.