Zadatak 13. Odredi prirodni broj x tako da vrijede jednakosti:

1) $2\binom{x}{4}=2\binom{x}{3}-\binom{x}{2}$;

2) $30\binom{x}{5}+8\binom{x}{4}=21\binom{x}{3}-8\binom{x}{2}$;

3) $\binom{x}{3}+\binom{x}{5}=\binom{x+1}{3}$;

4) $\binom{x}{4}+2\binom{x}{2}=\binom{x+1}{4}$.

Rješenje. **1)**

$$2\binom{x}{4}=2\binom{x}{3}-\binom{x}{2}$$
$$2\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}=2\frac{x(x-1)(x-2)}{6}-\frac{x(x-1)}{2}$$

x mora biti veći od 3 pa možemo kratiti izraz s $x(x-1)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{(x-2)(x-3)}{12}=\frac{x-2}{3}-\frac{1}{2}\\
&x^2-5x+6=4(x-2)-6\\
&x^2-5x+6=4x-14\\
&x^2-9x+20=0\\
&(x-4)(x-5)=0\\
&x_1=4, \qquad x_2=5
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
&30\binom{x}{5}+8\binom{x}{4}=21\binom{x}{3}-8\binom{x}{2}\\
&30\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{120}+8\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}\\
&\qquad=21\frac{x(x-1)(x-2)}{6}-8\frac{x(x-1)}{2}\\
&\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{4}+\frac{(x-2)(x-3)}{3}=7\frac{x-2}{2}-4\\
&3(x-2)(x-3)(x-4)+4(x-2)(x-3)-42(x-2)+48=0
\end{aligned}$$

Stavimo sad $u=x-2$ (dobit ćemo jednostavniji izraz):

$$\begin{aligned}
&3u(u-1)(u-2)+4u(u-1)-42u+48=0\\
&3u^3-9u^2+6u+4u^2-4u-42u+48=0\\
&3u^3-5u^2-40u+48=0
\end{aligned}$$

Tražimo rješenja ove kubne jednadžbe u skupu prirodnih brojeva. Takva rješenja moraju biti djelitelji slobodnog člana. Pritom mora biti i $u\geqslant 3$, jer je $x\geqslant 5$. U obzir dolaze brojevi 4, 6, 8, 12, 24 i 48. Već prvi pokušaj $u=4$ daje nam jedno rješenje ove jednadžbe:

$$3\cdot 4^3-5\cdot 4^2-40\cdot 4+48=192-80-160+48=0.$$

Druga rješenja nećemo tražiti na isti način, već ćemo polinom podijeliti s njegovim faktorom $(u-4)$, koji smo upravo pronašli:

$$\begin{array}{l} 3u^3 \ - \ 5u^2 \ -40u \ +48 : u-4 = 3u^2+7u-12 \\ \underline{3u^3 \ -12u^2} \\ \qquad 7u^2 \ -40u \ +48 \\ \qquad \underline{7u^2 \ -28u} \\ \qquad\qquad -12u \ +48 \\ \qquad\qquad \underline{-12u \ +48} \end{array}$$

.

Preostala dva rješenja dobivamo iz

$$3u^2+7u-12=0$$

$$u_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+4\cdot 6\cdot 12}}{6}$$

$$u_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{337}}{6}$$

i to nisu cijeli brojevi.

Dakle, zadovoljava samo $u=4$, odnosno $x=6$.

3)

$$\binom{x}{3}+\binom{x}{5}=\binom{x+1}{3}$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{6}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{120}=\frac{(x+1)x(x-1)}{6}$$

$$(x-2)+\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{20}=x+1$$

$$(x-2)(x-3)(x-4)=60=5\cdot 4\cdot 3$$

Zaključujemo da mora biti $x-2=5$, tj. $x=7$.

4)

$$\binom{x}{4}+2\binom{x}{2}=\binom{x+1}{4}$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}+2\frac{x(x-1)}{2}=\frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{24}$$

$$\frac{(x-2)(x-3)}{24}+1=\frac{(x+1)(x-2)}{24}$$

$$x^2-5x+6+24=x^2-x-2$$

$$-4x=-32$$

$$x=8$$