Zadatak 14. Dokaži sljedeće identitete direktno, i koristeći svojstva Pascalovog trokuta.

1) $\binom{n+2}{k} = \binom{n}{k-2} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$,
$2 \leqslant k \leqslant n$;

2) $\binom{n+3}{k} = \binom{n}{k-3} + 3\binom{n}{k-2} + 3\binom{n}{k-1}$
$+\binom{n}{k}$, $3 \leqslant k \leqslant n$.

Rješenje. **1)** Primjenjujemo svojstvo Pascalovog trokuta:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

To ćemo svojstvo primijeniti triput u sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned}\binom{n+2}{k} &= \binom{n+1}{k-1} + \binom{n+1}{k} \\ &= \binom{n}{k-2} + \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \\ &= \binom{n}{k-2} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

2) Sada ćemo najprije iskoristiti temeljni identitet, a zatim rezultat dobiven u prethodnom primjeru

$$\begin{aligned}\binom{n+3}{k} &= \binom{n+2}{k-1} + \binom{n+2}{k} \\ &= \binom{n}{k-3} + 2\binom{n}{k-2} + \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \\ &= \binom{n}{k-3} + 3\binom{n}{k-2} + 3\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.\end{aligned}$$