Zadatak 21. U skupu cijelih brojeva riješi jednadžbe:

1) $x^2 - y^2 = 105$;

2) $2x^2 + 5xy - 12y^2 = 28$;

3) $x + y = xy$;

4) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$.

Rješenje. **1)** Mora biti

$$(x-y)(x+y) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Umnožak dvaju brojeva s lijeve strane jednak je umnošku nekih dvaju brojeva s desne strane, pri čemu je prvi faktor manji od drugog. Sada trebamo riješiti sustav jednadžbi

$$\begin{cases} x - y = a, \\ x + y = b \end{cases} \quad \text{za} \quad \begin{array}{c|cccc} a & 1 & 3 & 5 & 7 \\ \hline b & 105 & 35 & 21 & 15 \end{array}$$

Rješenje sustava je (zbrajanjem i oduzimanjem jednadžbi):

$$x = \frac{a+b}{2}, \qquad y = \frac{b-a}{2}.$$

Uvrštavanjem dobivamo $x = 53$, $y = 52$; $x = 19$, $y = 16$; $x = 13$, $y = 8$; $x = 11$, $y = 4$,

2) Faktorizirajmo obje strane jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5xy - 12y^2 &= 28 \\ 2x^2 - 3xy + 8xy - 12y^2 &= 28 \\ x(2x-3y) + 4y(2x-3y) &= 28 \\ (2x-3y)(x+4y) &= 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \end{aligned}$$

Sada trebamo riješiti sustav jednadžbi

$$\begin{cases} 2x - 3y = a, \\ x + 4y = b \end{cases} \quad \text{za} \quad \begin{array}{c|cccccc} a & 1 & 2 & 4 & 7 & 14 & 28 \\ \hline b & 28 & 14 & 7 & 4 & 2 & 1 \end{array}$$

Rješenje sustava je

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & -3 \\ b & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{4a+3b}{11}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-a+2b}{11}.$$

Uvrštavanjem vrijednosti za a i b dobivamo cjelobrojna rješenja samo za $a = 1$, $b = 28$. Tad je $x = 8$, $y = 5$.

3) Zapišemo jednadžbu u obliku

$$\begin{aligned} x + y &= xy \\ xy - x - y + 1 &= 1 \\ (x-1)(y-1) &= 1 \end{aligned}$$

te odatle dobijemo jedina dva cjelobrojna rješenja, $(0,0)$, $(2,2)$.

4) Zapišemo jednadžbu u obliku

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 4 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1.$$

S lijeve strane je zbroj nenegativnih cijelih brojeva. Zato mora biti

$$(x-1)^2 = 1, \quad (y-2)^2 = 0,$$

ili

$$(x-1)^2 = 0, \qquad (y-2)^2 = 1.$$

Iz prvog sustava dobivamo $y = 2$ i $x - 1 = \pm 1$, dakle, dva rješenja, $(2,2)$ i $(0,2)$.

Iz drugog sustava dobivamo $x = 1$ i $y - 2 = \pm 1$, dakle, dva rješenja, $(1,3)$ i $(1,1)$.

Iz $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ dobijemo uređene parove cijelih brojeva koji su rješenja zadane jednadžbe: $(1,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$, $(0,2)$.