Zadatak 53.

Izračunaj:

1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$;

2) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

3) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Rješenje. **1)** Rastavimo na parcijalne razlomke tj. $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}$. Dobit će se $A=1$, $B=-1$, tj.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$
$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Zbroj je jednak $\frac{n}{n+1}$.

2) Rastavimo na parcijalne razlomke tj. $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}$ $=\frac{2n(A+B)+2(A-B)}{(2n-1)(2n+1)}$. Iz $1=2n(A+B)+2(A-B)$ slijedi $A+B=0$, odnosno $A=-B$ te je $1=4A$, $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$.

Sada suma izgleda ovako

$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{n}{2(2n+1)};$$

3) Rastavimo na parcijalne razlomke tj. $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$. Odavde slijedi

$$1=A[(n+1)(n+2)]+B[n(n+2)]+C[n(n+1)]$$
$$=n^2(A+B+C)+n(3A+2B+C)+2A$$

odnosno sustav jednakosti

$$A+B+C=0;$$
$$3A+2B+C=0;$$
$$2A=1.$$

Iz posljednje zaključujemo da je $A=\frac{1}{2}$. Uvrstimo li dobiveni rezultat u prvu dobije se $B=-\frac{1}{2}-C$. Sada iz druge jednakosti slijedi $\frac{3}{2}-1-2C+C=0$,

$C=\frac{1}{2}$. I na kraju $B=-1$. Sada traženu sumu možemo zapisati:

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\Big[1-2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n-1}-2\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-2\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$