Zadatak 3. Dokaži da je broj $\sqrt{3}$ iracionalan. Dokaži da su iracionalni i brojevi $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{2}$.

Rješenje. Pretpostavimo da je $\sqrt{3}$ racionalan. On se tada može prikazati u obliku $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$, gdje su m i n prirodni brojevi koji su relativno prosti (razlomak je do kraja skraćen). Kvadriranjem jednakosti $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$ dobivamo $3 = \frac{m^2}{n^2}$, odnosno $m^2 = 3n^2$. Kako je m^2 djeljiv s 3, s 3 mora biti djeljiv i broj m. Zato je on oblika $m = 3k$ pa dobivamo $3k^2 = n^2$ te je i n djeljiv s 3. Kako po pretpostavci brojevi m i n nemaju zajedničkog djelitelja, time smo dobili kontradikciju. To znači da $\sqrt{3}$ nije racionalan.

Pretpostavimo da je $\sqrt[3]{3}$ racionalan. On se tada može prikazati u obliku $\sqrt[3]{3} = \frac{a}{b}$, gdje su a i b prirodni brojevi koji su relativno prosti (razlomak je do kraja skraćen). Kubiranjem jednakosti $\sqrt[3]{3} = \frac{a}{b}$ dobivamo $3 = \frac{a^3}{b^3}$, odnosno $a^3 = 3b^3$. Kako je a^3 djeljiv s 3, s 3 mora biti djeljiv i broj a. Zato je on oblika $a = 3k$ pa dobivamo $9k^3 = b^3$ te je i b djeljiv s 3. Kako po pretpostavci brojevi a i b nemaju zajedničkog djelitelja, time smo dobili kontradikciju. To znači da $\sqrt[3]{3}$ nije racionalan.

Pretpostavimo da je $\sqrt[4]{2}$ racionalan. On se tada može prikazati u obliku $\sqrt[4]{2} = \frac{c}{d}$, gdje su c i d prirodni brojevi koji su relativno prosti (razlomak je do kraja skraćen). Gledanjem četvrte potencije jednakosti $\sqrt[4]{2} = \frac{c}{d}$ dobivamo $2 = \frac{c^4}{d^4}$, odnosno $c^4 = 2d^4$. Kako je c^4 djeljiv s 2, s 2 mora biti djeljiv i broj c. Zato je on oblika $c = 2k$ pa dobivamo $16k^4 = d^4$ odnosno $2k = d$ te je i d djeljiv s 2. Kako po pretpostavci brojevi c i d nemaju zajedničkog djelitelja, time smo dobili kontradikciju. To znači da $\sqrt[4]{2}$ nije racionalan.