

Zadatak 5. Ako su x i y prirodni brojevi takvi da je barem jedan od brojeva \sqrt{x} ili \sqrt{y} iracionalan, onda je iracionalan i broj $\sqrt{x} + \sqrt{y}$. Dokaži!

Rješenje. Pretpostavimo da je broj racionalan, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = u$ i uzmimo bez smanjenja općenitosti da je \sqrt{y} iracionalan. Kvadriranjem jednakosti $\sqrt{x} = u - \sqrt{y}$ dobivamo

$$x = u^2 - 2u\sqrt{y} + y; \quad \sqrt{y} = \frac{u^2 - x + y}{2}.$$

S lijeve strane posljednje jednakosti je iracionalan broj \sqrt{y} a s desne racionalan broj. Kako je ta jednakost kontradiktorna, a proistekla je iz pretpostavke da je $\sqrt{x} + \sqrt{y} = u$ racionalan, onda je ta pretpostavka pogrešna. Dakle je $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ iracionalan.