Zadatak 9. Dokaži da su sljedeći brojevi iracionalni:

1) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$; **2)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$;

3) $\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}$; **4)** $\sqrt{1+\sqrt{2}}$;

5) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Rješenje. **1)** Pretpostavimo da je $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ racionalan broj, tj. postoji $a \in \mathbf{Q}$ tako da je $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}=a$. Prebacimo $\sqrt{2}$ na desnu stranu i kubiranjem dobijemo:

$$\begin{aligned} 3 &= (a-\sqrt{2})^3 \\ 3 &= a^3-3a^2+6a-2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} &= \frac{a^3-3a^2+6a-3}{2}. \end{aligned}$$

S lijeve strane dobili smo iracionalan broj, a s desne racionalan što znači da je pretpostavka kriva, tj. $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ je iracionalan broj.

2) Pretpostavimo da je $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ racionalan broj, tj. postoji $a \in \mathbf{Q}$ tako da je $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}=a$. Prebacimo $\sqrt{5}$ na desnu stranu i dvostrukim kvadriranjem dobijemo:

$$\begin{aligned} (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 &= (a-\sqrt{5})^2 \\ 5+2\sqrt{6} &= a^2-2a\sqrt{5}+5 \\ 2\sqrt{6} &= a^2-2a\sqrt{5} \\ (2\sqrt{6})^2 &= (a^2-2a\sqrt{5})^2 \\ 24 &= a^4-4a^3\sqrt{5}+20a^2 \\ \sqrt{5} &= \frac{a^4+20a^2-24}{4a^3}. \end{aligned}$$

S lijeve strane dobili smo iracionalan broj, a s desne racionalan što znači da je pretpostavka kriva, tj. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ je iracionalan broj.

3) Pretpostavimo da je $\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}$ racionalan broj, tj. postoji $a \in \mathbf{Q}$ tako da je $\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}=a$. Prebacimo $\sqrt{2}$ na desnu stranu i kvadriranjem dobijemo:

$$\begin{aligned} (\sqrt[4]{2})^2 &= (a-\sqrt{2})^2 \\ \sqrt{2} &= a^2-2a\sqrt{2}+2 \\ 3\sqrt{2} &= a^2+2 \\ \sqrt{2} &= \frac{a^2+2}{3}. \end{aligned}$$

S lijeve strane dobili smo iracionalan broj, a s desne racionalan što znači da je pretpostavka kriva, tj. $\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}$ je iracionalan broj.

4) Pretpostavimo da je $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ racionalan broj, tj. postoji $a \in \mathbf{Q}$ tako da je $\sqrt{1+\sqrt{2}}=a$. Kvadriranjem dobijemo:

$$\begin{aligned} 1+\sqrt{2} &= a^2 \\ \sqrt{2} &= a^2-1 \end{aligned}$$

S lijeve strane dobili smo iracionalan broj, a s desne racionalan što znači da je pretpostavka kriva, tj. $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ je iracionalan broj.

5) Pretpostavimo da je $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ racionalan broj, tj. postoji $a \in \mathbf{Q}$ tako da je $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}=a$. Dvostrukim kvadriranjem dobijemo:

$$\begin{aligned} 1+\sqrt{2+\sqrt{3}} &= a^2 \\ \sqrt{2+\sqrt{3}} &= a^2-1 \\ 2+\sqrt{3} &= a^4-2a^2+1 \\ \sqrt{3} &= a^4-2a^2-1 \end{aligned}$$

S lijeve strane dobili smo iracionalan broj, a s desne racionalan što znači da je pretpostavka kriva, tj. $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ je iracionalan broj.