Zadatak 11. Dokaži da su sljedeći brojevi racionalni:

1) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$;

2) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$;

4) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$;

5) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$;

6) $\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}-\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}$.

Rješenje. **1)** Stavimo $x=\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$. Kvadriranjem dobivamo

$$x^2=6+2\sqrt{5}-2\sqrt{(6+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}+6-2\sqrt{5}=12-2\sqrt{16}=4$$

pa je $x=2$.

2) Stavimo $x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$. Kvadriranjem dobivamo

$$x^2=7-4\sqrt{3}+7+4\sqrt{3}+2\sqrt{49-16\cdot 3}=14+2=16$$

pa je $x=4$.

3) Stavimo $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=x$. Nakon kubiranja dobivamo

$$4-3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)=x^3,$$

što možemo zapisati u obliku $x^3+3x-4=0$. Lijevu stranu ove jednadžbe lako rastavimo u faktore te je $(x-1)(x^2+x+4)=0$. Ova jednadžba ima jedno realno rješenje, broj $x=1$. Kako je $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ njezin korijen, a realan je broj, on je jednak 1.

4) Stavimo $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=x$. Nakon kubiranja dobivamo

$$\begin{aligned}
14+3\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})^2(7-5\sqrt{2})}+3\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})^2}&=x^3,\\
14+3\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})(-1)}+3\sqrt[3]{(-1)(7-5\sqrt{2})}&=x^3,\\
14-3\left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\right)&=x^3,\\
x^3+3x-14&=0,\\
(x-2)(x^2+2x+7)&=0,
\end{aligned}$$

Ova jednadžba ima jedno realno rješenje, broj $x=2$. Kako je $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ njezin korijen, a realan je broj, on je jednak 2.

5) Stavimo $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=x$. Nakon kubiranja dobivamo

$$40+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})^2(20-14\sqrt{2})}+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})^2}=x^3,$$

$$40+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})\cdot 8}+3\sqrt[3]{8\cdot(20-14\sqrt{2})}=x^3,$$

$$14+6\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)=x^3,$$

$$x^3-6x-40=0,$$

$$(x-4)(x^2+4x+10)=0,$$

Ova jednadžba ima jedno realno rješenje, broj $x=4$. Kako je $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ njezin korijen, a realan je broj, on je jednak 4.

6) Stavimo $\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}-\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}=x$. Prvo sredimo izraz, a potom ga kvadriramo:

$$\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}-\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}=x,$$

$$\frac{\sqrt{(3-2\sqrt{2})(17+12\sqrt{2})}-\sqrt{(3-2\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})}}{\sqrt{(17-12\sqrt{2})(17+12\sqrt{2})}}=x$$

$$\frac{\sqrt{(3+2\sqrt{2})}-\sqrt{(3-2\sqrt{2})}}{1}=x$$

$$6-2\sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=x^2$$

$$6-2=x^2$$

Ova jednadžba ima realno rješenje, broj $x=2$. Dakle

$$\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}-\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}=2.$$