

Zadatak 16. Dokaži da su sljedeći brojevi iracionalni;
1) $\cos 15^\circ$; **2)** $\sin 15^\circ$; **3)** $\operatorname{tg} 5^\circ$; **4)** $\cos 20^\circ$.

Rješenje. **1)** $\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2};$

2) $\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2};$

3) Pretpostavimo da je $\operatorname{tg} 5^\circ$ racionalan. Tada je $\operatorname{tg} 10^\circ = \frac{2 \operatorname{tg} 5^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 5^\circ}$ racionalan, pa je racionalan i $\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(10^\circ + 5^\circ)$, a onda i $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{2 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$.

No to je kontradikcija jer je $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ iracionalan broj.

4) Označimo $\cos 20^\circ = x$. Taj je broj korijen jednadžbe $\cos 60^\circ = 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ$, odnosno jednadžbe $8x^3 - 6x - 1 = 0$. Pokazat ćemo da ova jednadžba nema racionalnih korijena, što će značiti da onda ni $\cos 20^\circ$, koji je jedan od njezinih triju korijena, nije racionalan. Uz supstituciju $y = 2x$ dobivamo jednadžbu $y^3 - 2y - 1 = 0$. Jedina moguća racionalna rješenja ove jednadžbe su brojevi ± 1 . No ti brojevi nisu rješenja, pa stoga ni početna jednadžba nema racionalnih rješenja.