

Zadatak 21. Riješi jednađžbe:

- 1) $\sqrt{1 + \sqrt{1+x}} = x$;
- 2) $\sqrt{2 - \sqrt{2+x}} = x$;
- 3) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = 2\sqrt{x+1}$;
- 4) $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \sqrt{x}$;
- 5) $\sqrt{x^2+6x+9} + \sqrt{x^2-4x+4} = 5$;
- 6) $x-1 = \sqrt{2x^2-3x-5}$;
- 7) $\sqrt{8+x} \cdot \sqrt{8-x} = x$.

Rješenje. 1) Mora biti $x \geq 0$. Sređivanjem jednakosti dobijemo:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \sqrt{1+x}} &= x, \\ 1 + \sqrt{1+x} &= x^2, \\ \sqrt{1+x} &= x^2 - 1, \\ 1+x &= x^4 - 2x^2 + 1, \\ x^4 - 2x^2 - x &= 0, \\ x(x^3 - 2x - 1) &= 0, \\ x[x^2(x+1) - x(x+1)^2 - (x+1)] &= 0, \\ x(x+1)(x^2 - x - 1) &= 0. \end{aligned}$$

$x = 0$ i $x = -1$ nisu rješenja polazne jednađžbe (uvrstiti). Pogledajmo sada rješenja kvadratne jednađžbe $x^2 - x - 1 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

pozitivno rješenje $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ je ujedno i rješenje polazne jednađžbe.

2) Mora biti $x \geq 0$. Sređivanjem jednakosti dobijemo:

$$\begin{aligned} \sqrt{2 - \sqrt{2+x}} &= x, \\ 2 - \sqrt{2+x} &= x^2, \\ 2 - x^2 &= \sqrt{2+x}, \\ 4 - 4x^2 + x^4 &= 2 + x, \\ x^4 - 4x^2 - x + 2 &= 0, \\ x^4 - 2x^3 + 2x^3 - 4x^2 - x + 2 &= 0, \\ x^3(x-2) + 2x^2(x-2) - 1(x-2) &= 0, \\ (x-2)(x^3 + 2x^2 - 1) &= 0, \\ (x-2)(x^2(x+1) + (x+1)(x-1)) &= 0, \\ (x+1)(x-2)(x^2+x-1) &= 0, \end{aligned}$$

$x = -1$ i $x = 2$ nisu rješenja polazne jednačbe (uvrstiti). Pogledajmo sada rješenja kvadratne jednačbe $x^2 + x - 1 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

pozitivno rješenje $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ je ujedno i rješenje polazne jednačbe.

3) Mora biti $x \geq 2$. Sređivanjem jednakosti dobijemo:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} &= 2\sqrt{x+1}, \\ 2x+3 + x-2 + 2\sqrt{(2x+3)(x-2)} &= 4(x+1), \\ 2\sqrt{(2x+3)(x-2)} &= x+3, \\ 4(2x+3)(x-2) &= x^2 + 6x + 9, \\ 4(2x^2 - x - 6) &= x^2 + 6x + 9, \\ 7x^2 - 10x - 33 &= 0. \end{aligned}$$

Pogledajmo sada rješenja dobivene kvadratne jednačbe:

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100+924}}{14} = \frac{10 \pm 32}{14} = \frac{5 \pm 16}{7}.$$

pozitivno rješenje $x = 3$ je ujedno i rješenje polazne jednačbe.

4) Mora biti $x \geq 0$. Sređivanjem jednakosti dobijemo:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1-x} &= 1 - \sqrt{x}, \\ 1-x &= 1 - 3\sqrt{x} + 3x - x\sqrt{x}, \\ 4x &= \sqrt{x}(x+3), \\ 16x^2 &= x(x^2 + 6x + 9), \\ x^3 - 10x^2 + 9x &= 0, \\ x(x^2 - 10x + 9) &= 0, \\ x(x-1)(x-9) &= 0, \end{aligned}$$

Pogledajmo sada rješenja dobivene kvadratne jednačbe:

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100+924}}{14} = \frac{10 \pm 32}{14} = \frac{5 \pm 16}{7}.$$

pozitivno rješenje $x = 3$ je ujedno i rješenje polazne jednačbe.

5) Sređimo jednačbu:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+6x+9} + \sqrt{x^2-4x+4} &= 5, \\ \sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(x-2)^2} &= 5, \\ |x+3| + |x-2| &= 5. \end{aligned}$$

Imamo tri slučaja: $x \in \langle -\infty, -3 \rangle$, $x \in [-3, 2]$ i $x \in [2, \infty)$
 $x \in \langle -\infty, -3 \rangle$:

$$-x-3-x+2=5, \quad -2x=4, \quad x=-2,$$

ne pripada zadanom interbalu.

$$x \in [-3, 2) :$$

$$x + 3 - x + 2 = 5, \quad 5 = 5;$$

Jednakost vrijedi za svaki $x \in [-3, 2)$.

$$x \in [2, \infty) :$$

$$x + 3 + x - 2 = 5, \quad 2x = 4, \quad x = 2$$

je rješenje polazne jednačbe.

Konačno rješenje je unija dobivenih rješenja, tj. konačno rješenje je interval $[-3, 2]$.

6) Iz jednačbe vidimo da x mora zadovoljavati uvjet $x \geq 1$. Sređimo jednačbu:

$$x - 1 = \sqrt{2x^2 - 3x - 5},$$

$$x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 3x - 5,$$

$$x^2 - x - 6 = 0,$$

$$(x + 2)(x - 3) = 0,$$

Rješenje koje zadovoljava postavljeni uvjet je $x = 3$ i to je jedino rješenje polazne jednačbe.

7) Iz jednačbe vidimo da x mora zadovoljavati uvjet $-8 \leq x \leq 8$. Sređimo jednačbu:

$$\sqrt{8+x} \cdot \sqrt{8-x} = x,$$

$$\sqrt{64-x^2} = x,$$

$$64 - x^2 = x^2,$$

$$x^2 = 32,$$

$$x = 4\sqrt{2}.$$

Rješenje polazne jednačbe je $x = 4\sqrt{2}$.