

Zadatak 32. Odredi najmanji interval koji sadrži skupove

- 1) $\{x^2 : 1 < x \leq 3\}$; 2) $\{x^2 : -1 < x \leq 3\}$;
 3) $\{x^2 - 3x : 2 < x \leq 3\}$; 4) $\{x^2 - 3x : 1 < x \leq 3\}$;
 5) $\{x^2 - 3x : -1 < x \leq 3\}$; 6) $\{x : x^2 - 2x \leq 3\}$.

Rješenje.

1) x^2 je parabola s otvorom prema gore i tjemenu i nultočkom u $x = 0$. Na intervalu $\langle 1, 3 \rangle$ je strogo rastuća i ima infimum u $x = 1$ i maksimum u $x = 3$. Dakle vrijednosti su joj iz intervala $\langle 1^2, 3^2 \rangle = \langle 1, 9 \rangle$;

2) x^2 je parabola s otvorom prema gore i tjemenu i nultočkom u $x = 0$. Na intervalu $\langle -1, 3 \rangle$ poprima minimum u $x = 0$ i maksimum u $x = 3$. Dakle vrijednosti su joj iz intervala $[0^2, 3^2] = [0, 9]$; $[0, 9]$;

3) $x^2 - 3x = x(x - 3)$ je parabola s otvorom prema gore i nultočkama u $x = 0$ i $x = 3$ i tjemenu u $x = \frac{3}{2}$. Na intervalu $\langle 2, 3 \rangle$ je strogo rastuća i ima infimum u $x = 2$ i maksimum u $x = 3$. Dakle vrijednosti su joj iz intervala $\langle -2, 0 \rangle$;

4) $x^2 - 3x = x(x - 3)$ je parabola s otvorom prema gore i nultočkama u $x = 0$ i $x = 3$ i tjemenu u $x = \frac{3}{2}$. Na intervalu $\langle 1, 3 \rangle$ poprima minimum u tjemenu $x = \frac{3}{2}$ i maksimum u $x = 3$.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4};$$

$$3^2 - 3 \cdot 3 = 9 - 9 = 0.$$

Dakle vrijednosti su joj iz intervala $\left[-\frac{9}{4}, 0\right]$;

5) $x^2 - 3x = x(x - 3)$ je parabola s otvorom prema gore i nultočkama u $x = 0$ i $x = 3$ i tjemenu u $x = \frac{3}{2}$. Na intervalu $\langle -1, 3 \rangle$ poprima minimum u tjemenu $x = \frac{3}{2}$ i maksimum u $x = 3$.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4};$$

$$3^2 - 3 \cdot 3 = 9 - 9 = 0.$$

Dakle vrijednosti su joj iz intervala $\left[-\frac{9}{4}, 0\right]$;

6) $\{x : x^2 - 2x \leq 3\} = \{x : x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$. $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) = 0$ je parabola s otvorom prema gore i nultočkama u $x = -1$ i $x = 3$ i tjemenu u $x = 1$ te je $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ za $x \in [-1, 3]$.

Traženi interval je $x \in [-1, 3]$.