

Zadatak 6. Ako je $x + \frac{1}{x}$ cijeli broj, dokaži da je onda i $x^n + \frac{1}{x^n}$ cijeli broj za sve prirodne n .

Rješenje. 1° Za $n = 1$ imamo $x^n + \frac{1}{x^n} = x + \frac{1}{x}$, a to je cijeli broj prema pretpostavci zadatka.

2° Pretpostavimo da je $x^m + \frac{1}{x^m}$ cijeli broj za sve $1 \leq m \leq k$. Dokažimo da je onda i $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$ cijeli broj. Možemo zapisati

$$\begin{aligned} x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} &= \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right). \end{aligned}$$

Brojevi $x^k + \frac{1}{x^k}$ i $x + \frac{1}{x}$ cijeli su prema pretpostavci, a broj $x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}$, za $k \geq 2$ cijeli je na isti način, za $k = 1$ on je jednak 2.