Zadatak 12. Odredi brojeve a, b, c, d takve da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$a\binom{n}{1}+b\binom{n}{2}+c\binom{n}{3}+d\binom{n}{4}=n^4.$$

Rješenje. S lijeve i s desne strane nalaze se polinomi po nepoznanici n. Da bi vrijedila jednakost, moraju im se podudarati koeficijenti. Računanjem lijeve strane i sređivanjem dobijemo

$$na+\frac{n(n-1)}{2}b+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}c+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}d=n^4$$

$$24na+12(n^2-n)b+4(n^3-3n^2+2n)c+(n^4-6n^3+11n^2-6n)d=24n^4$$

$$24na+(12n^2-12n)b+(4n^3-12n^2+8n)c+(n^4-6n^3+11n^2-6n)d=24n^4$$

$$d\cdot n^4+(4c-6d)\cdot n^3+(12b-12c+11d)\cdot n^2+(24a-12b+8c-6d)\cdot n=n^4;$$

iz čega slijedi sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned}&d=24\\&4c-6d=0\\&12b-12c+11d=0\\&24a-12b+8c-6d=0.\end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobije se

$$\begin{aligned}&d=24;\\&4c-144=0,\ 4c=144,\ c=36;\\&12b-432+264=0,\ 12b=168,\ b=14;\\&24a-168+288-144=0,\ 24a=24,\ a=1.\end{aligned}$$

Traženi brojevi su $a=1$, $b=14$, $c=36$, $d=24$.