Zadatak 15. Ako su C_1, C_2, C_3, C_4 četiri uzastopna binomna koeficijenta, dokaži da vrijedi $\dfrac{C_1}{C_1+C_2}+\dfrac{C_3}{C_3+C_4}=\dfrac{2C_2}{C_2+C_3}$.

Rješenje. Podijelimo brojnik i nazivnik prvog razlomka s C_1, drugog s C_3 i trećeg s C_2, dobijemo

$$\frac{1}{1+\dfrac{C_2}{C_1}}+\frac{1}{1+\dfrac{C_4}{C_3}}=\frac{2}{1+\dfrac{C_3}{C_2}}.$$

Ako je $C_1=\binom{n}{k}$, onda je $C_2=\binom{n}{k+1}$, $C_3=\binom{n}{k+2}$, $C_4=\binom{n}{k+3}$ i vrijedi

$$\frac{C_2}{C_1}=\frac{\dfrac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}}{\dfrac{n!}{(n-k)!k!}}=\frac{n-k}{k+1};$$

$$\frac{C_3}{C_2}=\frac{\dfrac{n!}{(n-k-2)!(k+2)!}}{\dfrac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}}=\frac{n-k-1}{k+2};$$

$$\frac{C_4}{C_3}=\frac{\dfrac{n!}{(n-k-3)!(k+3)!}}{\dfrac{n!}{(n-k-2)!(k+2)!}}=\frac{n-k-2}{k+3};$$

Uvrštavanjem se dobiva

$$\frac{1}{1+\dfrac{n-k}{k+1}}+\frac{1}{1+\dfrac{n-k-2}{k+3}}=\frac{2}{1+\dfrac{n-k-1}{k+2}}$$

$$\frac{k+1}{n+1}+\frac{k+3}{n+1}=\frac{2(k+2)}{n+1};$$

čime je dokazana tvrdnja.