

Zadatak 17. U raspisu potencije $(1+x)^{100}$ koeficijenti od x^k i x^{3k} , $1 \leq k \leq 33$, su jednaki. Odredi k .

Rješenje. Zapišimo dani izraz u obliku $(x+1)^{100}$. Opći član razvoja je $\binom{100}{k}x^k$. Izjednačavanjem koeficijenata uz x^k i x^{3k} dobije se

$$\binom{100}{k} = \binom{100}{3k}$$

Daljnim sređivanjem:

$$\begin{aligned}\frac{100!}{k!(100-k)!} &= \frac{100!}{(3k)!(100-3k)!} \\ (3k)!(100-3k)! &= k!(100-k)! \\ \frac{(3k)!}{k!} &= \frac{(100-k)!}{(100-3k)!}\end{aligned}$$

$$(k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot (3k) = (100-3k+1) \cdot (100-3k+2) \cdot \dots \cdot (100-k).$$

Na lijevoj i desnoj strani jednakosti imamo $2k-1$ uzastopnih prirodnih brojeva iz čega slijedi da odgovarajući među njima moraju biti jednaki. Izjednačavanjem najvećih dobije se

$$3k = 100 - k \implies k = 25.$$