Zadatak 26. Za prirodne brojeve n dokaži:

1) $13 \mid 3^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+3}$;

2) $19 \mid 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$;

3) $23 \mid 2^{4n+1} - 3 \cdot 7^n + 5^{n+1} \cdot 6^n$;

4) $23 \mid 5^{2n+1} + 2^{n+1} + 25^{n+4}$;

5) $25 \mid 3^{6n} + 7^n(7^n - 2^{n+1})$;

6) $41 \mid 5 \cdot 7^{2n+2} + 2^{3n}$;

7) $47 \mid 7^{2n+1} + 40 \cdot 2^n$;

8) $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$.

Rješenje. Tvrdnje se dokazuju indukcijom.

1) *Baza.*

$13 \mid 3 \cdot 5^2 + 2^4 = 91$;

Pretpostavka.

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodan broj n, tj. da vrijedi $13 \mid 3^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+3}$ dokažimo ju za $n+1$.

Korak.

$$3^{n+1} \cdot 5^{n+2} + 2^{n+4} = 15(3^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+3}) - 13 \cdot 2^{n+3};$$

Oba pribrojnika su djeljiva s 13, drugi očito a prvi po pretpostavci indukcije. Time je tvrdnja dokazana.

2) *Baza.*

$19 \mid 5^3 \cdot 2^3 + 3^3 \cdot 2^3 = 1216$;

Pretpostavka.

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodan broj n, tj. da vrijedi $19 \mid 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ dokažimo ju za $n+1$.

Korak.

$$\begin{aligned} 5^{2n+3} \cdot 2^{n+3} + 3^{n+3} \cdot 2^{2n+3} &= 50(5^{2n+1} \cdot 2^{n+2}) + 12(3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}) \\ &= 50(5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}) - 38(3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}); \end{aligned}$$

Oba pribrojnika su djeljiva s 19, drugi očito a prvi po pretpostavci indukcije. Time je tvrdnja dokazana.

3) *Baza.*

$23 \mid 2^5 - 3 \cdot 7 + 5^2 \cdot 6 = 32 - 21 + 150 = 161$;

Pretpostavka.

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodan broj n, tj. da vrijedi $23 \mid 2^{4n+1} - 3 \cdot 7^n + 5^{n+1} \cdot 6^n$ dokažimo ju za $n+1$.

Korak.

$$\begin{aligned} 2^{4n+5} - 3 \cdot 7^{n+1} + 5^{n+2} \cdot 6^{n+1} &= 16 \cdot 2^{4n+1} - 7 \cdot 3 \cdot 7^n + 30 \cdot 5^{n+1} \cdot 6^n \\ &= 16(2^{4n+1} - 3 \cdot 7^n + 5^{n+1} \cdot 6^n) + 9 \cdot 3 \cdot 7^n + 14 \cdot 5^{n+1} \cdot 6^n; \end{aligned}$$

4) *Baza.*

$23 \mid 5^3 + 2^2 + 25^5 = 125 + 4 + 9765625 = 9765754 = 23 \cdot 424598$;

Pretpostavka.

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodan broj n, tj. da vrijedi $23 \mid 5^{2n+1} + 2^{n+1} + 25^{n+4}$ dokažimo ju za $n+1$.

Korak.

$$\begin{aligned} 5^{2n+3} + 2^{n+2} + 25^{n+5} &= 25 \cdot 5^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+1} + 25 \cdot 25^{n+4} \\ &= 25(5^{2n+1} + 2^{n+1} + 25^{n+4}) - 23 \cdot 2^{n+1}; \end{aligned}$$

Oba pribrojnika su djeljiva s 23, drugi očito a prvi po pretpostavci indukcije. Time je tvrdnja dokazana.

5)

$25 \mid 3^{6n} + 7^n(7^n - 2^{n+1})$;

Baza.

$25 \mid 3^6 + 7(7 - 2^2) = 729 + 21 = 750 = 25 \cdot 30$;

Pretpostavka.

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodan broj n, tj. da vrijedi $25 \mid 3^{6n} + 7^n(7^n - 2^{n+1}) = 3^{6n} + 7^{2n} - 7^n 2^{n+1}$ dokažimo ju za $n+1$.

Korak.

$$\begin{aligned} 3^{6n+6} + 7^{n+1}(7^{n+1} - 2^{n+2}) &= 3^{6n+6} + 7^{2n+2} - 7^{n+1}2^{n+2} \\ &= 729 \cdot 3^{6n} + 49 \cdot 7^{2n} - 14 \cdot 7^n 2^{n+1} \\ &??????????? \end{aligned}$$

Oba pribrojnika su djeljiva s 23, drugi očito a prvi po pretpostavci indukcije. Time je tvrdnja dokazana.

6) *Baza.*

$41 \mid 5 \cdot 7^4 + 2^3 = 12005 + 8 = 12013 = 41 \cdot 293$;

Pretpostavka.

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodan broj n, tj. da vrijedi $41 \mid 5 \cdot 7^{2n+2} + 2^{3n}$ dokažimo ju za $n+1$.

Korak.

$$\begin{aligned} 5 \cdot 7^{2n+4} + 2^{3n+3} &= 49 \cdot 5 \cdot 7^{2n+2} + 8 \cdot 2^{3n} \\ &= 49 \cdot (5 \cdot 7^{2n+2} + 2^{3n}) - 41 \cdot 2^{3n} \end{aligned}$$

Oba pribrojnika su djeljiva s 41, drugi očito a prvi po pretpostavci indukcije. Time je tvrdnja dokazana.

7) *Baza.*

$47 \mid 7^3 + 40 \cdot 2 = 423 = 47 \cdot 9$;

Pretpostavka.

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodan broj n, tj. da vrijedi $47 \mid 7^{2n+1} + 40 \cdot 2^n$ dokažimo ju za $n+1$.

Korak.

$$\begin{aligned} 7^{2n+3} + 40 \cdot 2^{n+1} &= 49 \cdot 7^{2n+1} + 2 \cdot 40 \cdot 2^n \\ &= 49 \cdot (7^{2n+1} + 40 \cdot 2^n) - 47 \cdot 40 \cdot 2^n \end{aligned}$$

Oba pribrojnika su djeljiva s 47, drugi očito a prvi po pretpostavci indukcije. Time je tvrdnja dokazana.

8) $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$.

Baza.

$133 \mid 11^3 + 12^3 = 1331 + 1728 = 3059 = 133 \cdot 23$;

Pretpostavka.

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodan broj n, tj. da vrijedi $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ dokažimo ju za $n+1$.

Korak.

$$\begin{aligned} 11^{n+3} + 12^{2n+3} &= 11 \cdot 11^{n+2} + 144 \cdot 12^{2n+1} \\ &= 11 \cdot (11^{n+2} + 12^{2n+1}) + 133 \cdot 12^{2n+1} \end{aligned}$$

Oba pribrojnika su djeljiva sa 133, drugi očito a prvi po pretpostavci indukcije. Time je tvrdnja dokazana.