Zadatak 40. Za pozitivne brojeve a i b definiraju se sljedeće sredine; **harmonijska**: $H(a,b)=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$, **geometrijska**: $G(a,b)=\sqrt{ab}$, **aritmetička**: $A(a,b)=\dfrac{a+b}{2}$, **kvadratna**: $K(a,b)=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. Dokaži da je uvijek

$$\min\{a,b\}\leqslant H(a,b)\leqslant G(a,b)\leqslant A(a,b)$$
$$\leqslant K(a,b)\leqslant \max\{a,b\}.$$

Vrijedi i poopćenje ove tvrdnje za sredine n pozitivnih brojeva $a_1,\ldots,a_n$. Razmisli kako u tom slučaju glase ove sredine.

Rješenje. Pretpostavimo da je $a\leqslant b$.
Provjerimo prvu nejednakost:

$$\min\{a,b\}\leqslant H(a,b) \iff a\leqslant \frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \iff a\leqslant \frac{2ab}{a+b}$$
$$\iff a^2+ab\leqslant 2ab \iff a\leqslant b;$$

Nejednakost je valjana.
Sada provjerimo da li vrijedi $G(a,b)\leqslant A(a,b)$, tj. $A(a,b)\geqslant G(a,b)$:

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab} \iff (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0;$$

što je istina.

Za dokaz nejednakosti $H(a,b)\leqslant G(a,b)$ uzmemo da je $a=\dfrac{1}{c}$, $b=\dfrac{1}{d}$ te imamo:

$$\sqrt{\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{d}}\geqslant\frac{2}{c+d} \iff (c+d)^2\geqslant 2cd \iff c^2+d^2\geqslant 0;$$

$A(a,b)\leqslant K(a,b)$:

$$2ab\leqslant a^2+b^2 \implies (a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leqslant 2(a^2+b^2)$$
$$\frac{a+b}{2}=\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \iff \frac{(a+b)^2}{4}\leqslant\frac{a^2+b^2}{2};$$

Zbog $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$ nejednakost je istinita.
I na kraju dokažimo $K(a,b)\leqslant\max\{a,b\}$:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leqslant b \iff \frac{a^2+b^2}{2}\leqslant b^2 \iff a^2\leqslant b^2;$$

što je istina zbog pretpostavke da je $a\leqslant b$.

Za n pozitivnih brojeva $a_1, \dots, a_n$ ove sredine glase:

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}};$$

$$G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n};$$

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n};$$

$$K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$