Zadatak 41. Dokaži da za pozitivne brojeve x, y, z, u vrijede nejednakosti

1) $(x+y+z+u)^4 \geqslant 256xyzu$;

2) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) \geqslant 9xyz$.

Rješenje. Za $x,y,z,u \geqslant 0$ vrijedi $G(x,y,z) \leqslant A(x,y,z)$ odnosno $G(x,y,z,u) \leqslant A(x,y,z,u)$ iz čega slijedi

$$\sqrt[4]{xyzu} \leqslant \frac{x+y+z+u}{4} \iff 256xyzu \leqslant (x+y+z+u)^4;$$

$$\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x+y+z}{3} \iff 9xyz \leqslant (x+y+z)^3$$

$$\iff 9xyz \leqslant (x+y+z)(x+y+z)^2;$$

Zbog $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz \geqslant x^2+y^2+z^2$ nejednakost vrijedi.