Zadatak 42. Dokaži:

1) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{3n+1}>1$;

2) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24}$.

Rješenje. **1)** Dokaz teče matematičkom indukcijom. Za $n=1$ imamo istinitu nejednakost $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}>1$. Za $n=k$ pretpostavimo da je $\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k+2}+\ldots+\dfrac{1}{3k+1}>1$. Dodajmo s lijeve i s desne strane $\dfrac{1}{3k+2}+\dfrac{1}{3k+3}+\dfrac{1}{3k+4}$. Prvi član lijeve strane $\dfrac{1}{k+1}$ prebacimo desno te imamo $\dfrac{1}{k+2}+\ldots+\dfrac{1}{3k+4}>1+\dfrac{1}{3k+2}+\dfrac{1}{3k+3}+\dfrac{1}{3k+4}-\dfrac{1}{k+1}$. Desna je strana veća od 1, pa je od 1 veća i lijeva strana.

2) Dokaz teče matematičkom indukcijom. Za $n=1$ imamo istinitu nejednakost $\dfrac{1}{2}>\dfrac{13}{24}$. Za $n=k$ pretpostavimo da je $\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k+2}+\ldots+\dfrac{1}{2k}>\dfrac{13}{24}$.

Provjerimo za $n=k+1$:

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k+2}>\frac{13}{24}$$

$$\iff \frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k+2}>\frac{13}{24}+\frac{1}{k+1}$$

$$\iff \frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}+\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$$

$$\iff \frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}$$
$$>\frac{13}{24}+\frac{(2k+1)(2k+2)-(2k+2)(k+1)-(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+2)(k+1)}$$

$$\iff \frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}-\frac{1}{k+1}(2k+1)(2k+2)(k+1).$$

S lijeve strane po pretpostavci je broj veći od $\dfrac{13}{24}$ a na desnoj je $\dfrac{13}{24}$ umanjen za neki pozitivni broj iz čega slijedi tvrdnja.