

Zadatak 43.

Dokaži:

$$1) \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}};$$

$$2) \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Rješenje.

Može se dokazati matematičkom indukcijom.

No evo još jednog dokaza za 2). Najprije dokaži $\frac{a}{b} \leq \frac{a+k}{b+k}$ za sve $a, b, k \in \mathbf{N}$.

Dakle, $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1}$. Pomnožimo nejednakost sa $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$. Dobijemo $\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right)^2 \leq \frac{1}{2n+1}$ i odatle slijedi tvrdnja.