Zadatak 51. Ako je $\alpha = \sqrt[7]{1}$ različit od 1, tada je

$$\alpha^4 + \alpha^2 + \alpha = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}.$$

Dokaži!

Rješenje. Vrijedi

$$\alpha \cdot \alpha^6 = \alpha^7 = 1.$$

Slično tome je

$$\alpha^2 \cdot \alpha^5 = 1, \quad \alpha^3 \cdot \alpha^4 = 1.$$

Označimo

$$z_1 = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4, \quad z_2 = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6.$$

Kako su 1, $\alpha, \ldots, \alpha^6$ nultočke polinoma $P(z) = z^7 - 1$, njihov je zbroj po Vièteovim formulama jednak nuli pa je

$$z_1 + z_2 = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = -1.$$

Sada vrijedi, prema gornjem i korištenjem relacije $\alpha^7 = 1$:

$$z_1 z_2 = (\alpha+\alpha^2+\alpha^4)(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6) = \alpha^4+\alpha^5+1+\alpha^6+1+\alpha^2+1+\alpha+\alpha^3 = 2$$

pa su z_1 i z_2 nultočke polinoma $z^2 + z + 2 = 0$, odakle slijedi tvrdnja.