Zadatak 2. Na graf funkcije f položena je tangenta s nagibom k. Odredi njezinu jednadžbu i koordinate dirališta, ako je:

1) $f(x) = x^2 + 4x + 3$, $k = -2$;

2) $f(x) = 2x^2 - x + 1$, $k = -\frac{1}{2}$;

3) $f(x) = x^3 - 1$, $k = -3$;

4) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 4$, $k = 0$;

5) $f(x) = -x^4 + 1$, $k = \frac{1}{2}$.

Rješenje. **1)** $k = f'(x_0) = (x_0^2 + 4x_0 + 3)' = 2x_0 + 4 = -2 \implies 2x_0 = -6 \implies x_0 = -3$, $y_0 = 9 - 12 + 3 = 0$; koordinate dirališta su $(-3, 0)$. Jednadžba tangente glasi $y - 0 = -2(x + 3)$, odnosno $y = -2x - 6$.

2) $k = f'(x_0) = (2x_0^2 - x_0 + 1)' = 4x_0 - 1 = -\frac{1}{2} \implies 4x_0 = \frac{1}{2} \implies x_0 = \frac{1}{8}$; $y_0 = \frac{2}{64} - \frac{1}{8} + 1 = \frac{58}{64} = \frac{29}{32}$; koordinate dirališta su $\left(\frac{1}{8}, \frac{29}{32}\right)$. Jednadžba tangente glasi $y - \frac{29}{32} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{8}\right)$, odnosno $16x + 32y - 31 = 0$;

3) $k = f'(x) = (x^3 - 1)' = 3x^2 \neq -3$; nema rješenja;

4) $k = f'(x_0) = (x_0^4 - 2x_0^3 + x_0^2 - 4)' = 4x_0^3 - 6x_0^2 + 2x_0 = 2x_0(2x_0^2 - 3x_0 + 1) = 0$. Tri su točke: $(0, -4)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{63}{16}\right)$ i $(1, -4)$. Tangente su pravci $y + 4 = 0$ (za slučajeve $x = 0$ i $x = 1$) te $16y + 63 = 0$;

5) $k = f'(x_0) = (-x^4 + 1)' = -4x^3 = \frac{1}{2} \implies x^3 = -\frac{1}{8} \implies x = -\frac{1}{2}$, $y_0 = -\frac{1}{16} + 1 = \frac{15}{16}$; koordinate dirališta su $\left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{16}\right)$. Jednadžba tangente glasi $y - \frac{15}{16} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)$, odnosno $8x - 16y + 19 = 0$.