

Zadatak 20. Nađi jednađbe tangenata krivulje $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x$ koje su paralelne pravcu $y = -x$. Kolika je udaljenost među tim tangentama?

Rješenje.

Koeficijent smjera pravca jednak je -1 . Da bi tangenta bila paralelna s pravcem treba biti $y' = x^2 - 3x + 1 = -1 \implies x^2 - 3x - 2 = 0 \implies (x-2)(x-1) = 0 \implies x_1 = 1, x_2 = 2$. Vrijednosti koje funkcija poprima

u tim točkama su $y_1(1) = \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{3}{2} \cdot 1 + 1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{2-9+6}{6} = -\frac{1}{6}$

i $y_2(2) = \frac{1}{3} \cdot 8 - \frac{3}{2} \cdot 4 + 2 = \frac{8}{3} - 6 + 2 = \frac{8}{3} - 4 = \frac{8-12}{3} = -\frac{4}{3}$.

Koordinate dirališta su $T_1\left(1, -\frac{1}{6}\right)$, $T_2\left(2, -\frac{4}{3}\right)$. Jednađbe tangenata su

$y + \frac{1}{6} = -(x-1) \implies 6x + 6y - 5 = 0$ i $y + \frac{4}{3} = -(x-2) \implies 3x + 3y - 2 = 0$. Udaljenost točke T_1 od druge tangente jednaka je

$$d(T_1, t_2) = \left| \frac{3 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{1}{6} - 2}{\sqrt{9+9}} \right| = \frac{3 - \frac{1}{2} - 2}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$