

**Zadatak 13.**

Odredi ekstreme sljedećih funkcija:

- 1)  $f(x) = 12x - (3x - 1)^2$ ;
- 2)  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ ;
- 3)  $f(x) = x^3 - 3x$ .
- 4)  $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$ ;
- 5)  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$ ;
- 6)  $f(x) = x^4 - 2x^2$ ;
- 7)  $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ ;
- 8)  $f(x) = (x + 2)(x + 1)^3$ ;

**Rješenje.**

1) Prva derivacija funkcije je  $f'(x) = 12 - 2(3x - 1) \cdot 3 = 12 - 18x + 6 = 18(1 - x)$ , a druga derivacija je  $f''(x) = -18$ . Stacionarna točka je  $f'(x) = 0 \implies 1 - x = 0 \implies x = 1$ . Odredimo predznak druge derivacije u stacionarnoj točki  $f''(1) = -18 < 0$ , slijedi da je  $x = 1$  lokalni maksimum. Vrijednost funkcije u  $x = 1$  je  $f(1) = 12 \cdot 1 - (3 \cdot 1 - 1)^2 = 8$ .  $M(1, 8)$

2)  $f'(x) = -2x + 2 = 2(1 - x)$ ;  $f''(x) = -2$ . Stacionarna točka je  $x = 1$ .  $f''(1) = -2 < 0$  slijedi da je  $x = 1$  lokalni maksimum. Vrijednost funkcije u  $x = 1$  je  $f(1) = 4$ .  $M(1, 4)$ .

3)  $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$ ,  $f''(x) = 6x$ . Stacionarne točke su  $x_1 = 1$  i  $x_2 = -1$ .  $f''(1) = 6 > 0$ ,  $f''(-1) = -6 < 0$  slijedi da je  $x_1 = 1$  lokalni minimum, a  $x = -1$  lokalni maksimum. Vrijednost funkcije u  $x_1 = 1$  je  $f(1) = -2$ , a u  $x_2 = -1$  je  $f(-1) = 2$ .  $M(-1, 2)$ ,  $m(1, -2)$ .

4)  $f'(x) = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x^2 - 2x - 3) = 6(x + 1)(x - 3)$ ,  $f''(x) = 12x - 12 = 12(x - 1)$ . Stacionarne točke su  $x_1 = 3$  i  $x_2 = -1$ .  $f''(3) = 24 > 0$ ,  $f''(-1) = -24 < 0$  slijedi da je  $x_1 = 3$  lokalni minimum, a  $x_2 = -1$  lokalni maksimum. Vrijednost funkcije u  $x_1 = 3$  je  $f(3) = -41$ , a u  $x = -1$  je  $f(-1) = 17$ .  $M(-1, 17)$ ,  $m(3, -47)$ .

5)  $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x + 2)(x - 1)$ ,  $f''(x) = 12x + 6$ . Stacionarne točke su  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 1$ .  $f''(-2) = -18 < 0$ ,  $f''(1) = 18 > 0$  slijedi da je  $x_1 = -2$  lokalni maksimum, a  $x_2 = 1$  lokalni minimum. Vrijednost funkcije u  $x_1 = -2$  je  $f(-2) = 35$ , a u  $x_2 = 1$  je  $f(1) = -2$ .  $M(-2, 25)$ ,  $m(1, -2)$ .

6)  $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x - 1)(x + 1)$ ,  $f''(x) = 12x^2 - 4$ . Stacionarne točke su  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  i  $x_3 = -1$ .  $f''(0) = -4 < 0$ ,  $f''(1) = 8 > 0$ ,  $f''(-1) = 8 > 0$  slijedi da je  $x_1 = 0$  lokalni maksimum,  $x_2 = 1$  lokalni minimum, a  $x_3 = -1$  lokalni minimum. Vrijednost funkcije u  $x_1 = 0$  je  $f(0) = 0$ , u  $x_2 = 1$  je  $f(1) = -1$  i u  $x_3 = -1$  je  $f(-1) = -1$ .  $M(0, 0)$ ,  $m(-1, -1)$ ,  $m(1, -1)$ .

7)  $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x - 2)(x + 2)$ ,  $f''(x) = 12x^2 - 16$ . Stacionarne točke su  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$  i  $x_3 = -2$ .  $f''(0) = -16 < 0$ ,  $f''(2) = 32 > 0$  i  $f''(-2) = 32 > 0$  slijedi da je  $x_1 = 0$  lokalni maksimum,  $x_2 = 2$  lokalni minimum i  $x_3 = -2$  lokalni minimum. Vrijednost funkcije u  $x_1 = 0$  je  $f(0) = -9$ , u  $x_2 = 2$  je  $f(2) = -25$  i u  $x_3 = -2$  je  $f(-2) = -25$ .  $M(0, -9)$ ,  $m(2, -25)$ ,  $m(-2, -25)$ .

**8)**  $f'(x) = (x+1)^3 + (x+2)3(x+1)^2 = (x+1)^2(x+1+3x+6) = (x+1)^2(4x+7)$ ,  $f''(x) = 2(x+1)(4x+7) + 4(x+1)^2 = (x+1)(8x+14+4x+4) = (x+1)(12x+18)$ . Stacionarne točke su  $x_1 = -1$  i  $x_2 = -\frac{7}{4}$ .  
 $f''(-1) = 0$  i  $f''\left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{9}{4} > 0$  slijedi da je  $x_2 = -\frac{7}{4}$  lokalni minimum, a  $x_1 = -1$  nije ekstrem. Vrijednost funkcije u  $x_2 = -\frac{7}{4}$  je  $f\left(-\frac{7}{4}\right) = -\frac{27}{256}$ .  
 $m\left(-\frac{7}{4}, -\frac{27}{256}\right)$ .